

Math. P.
538ms

Math. P. 538 mf Spitzer

C
VORLESUNGEN

über

lineare Differential-Gleichungen.

Von

Prof. SIMON SPITZER.

WIEN.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1878.

VORLESUNGEN

lineare Differentialgleichungen.



V o r r e d e.

Im Jahre 1782 erschien in den „*Histoire de l'académie royale des sciences*“ eine Arbeit von dem berühmten Laplace unter dem Titel: „*Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres.*“ Im 16. Artikel dieses Memoires wird die Integration der Gleichung

$$0 = (a + bs) y + (a_1 + b_1 s) \frac{dy}{ds} + (a_2 + b_2 s) \frac{d^2 y}{ds^2} + \dots$$

gezeigt mittelst Integrale von der Form:

$$y = \int e^{-sx} \varphi dx$$

woselbst φ bestimmt wird aus der Gleichung

$$0 = (a - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \dots) \varphi + \frac{d[\varphi (b_1 - b_2 x + b_3 x^2 - \dots)]}{dx}$$

und die Integrationsgrenzen aus der Gleichung

$$0 = e^{-sx} \varphi (b - b_1 x + b_2 x^2 - \dots)$$

Dann erweitert Laplace diese Methode auf lineare Differenzen-Gleichungen, auf lineare Gleichungen mit gemischten Differentialquotienten und Differenzquotienten, schliesslich auch auf partielle Differentialgleichungen.

Diese Arbeit von Laplace wurde von den Mathematikern lange unbeachtet gelassen. Denn wie ist es sonst erklärlich, dass Liouville im XXI. Bande von Gergonne's Annalen der Mathematik (1830—1831) die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = (p + qx) u$$

welche er durch Einführung neuer Variablen auf die einfachere Form

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = ux$$

bringt, auf mühsamem Wege integrirt, und schliesslich zu Integralen gelangt, die er ja augenblicklich erhalten, wenn er die oben erwähnte Methode von

Laplace angewendet hätte. Im X. Bande (1833) von Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik versucht Scherk die Integration der Gleichung

$$\frac{d^n y}{d x^n} = (\alpha + \beta x) y$$

durchzuführen. Durch Einführung neuer Variablen bringt er die zu integrierende Gleichung auf die Form:

$$\frac{d^n y}{d x^n} = x y$$

integriert selbe, ganz nach dem Vorgange Liouville's, vorerst mittelst unendlicher Reihen, die er dann in bestimmte Integrale umwandelt.

Im selben Bande von Crelle's Journal beweist der berühmte Jacobi die Richtigkeit des von Scherk gefundenen Integrales, gedenkt aber hiebei bloß der im selben Bande stehenden Arbeit von Scherk.

Im XVII. Bande von Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik (1837) integriert Lobatto die Gleichung

$$\frac{d^n y}{d x^n} = x y$$

indem er das Integrale derselben in der Form

$$y = \int e^{p x} P dp$$

voraussetzt, sodann P als Function von p und die Integrationsgrenzen so bestimmt, dass der gegebenen Gleichung genügt wird. Es ist dies die Laplace'sche Methode, welche Lobatto anwendet, nur entgeht ihm dies, er glaubt eine eigene Integrationsmethode gefunden zu haben.

Ich könnte noch eine zweite Differentialgleichung anführen, welche sich ebenfalls leicht mittelst der Laplace'schen Methode integrieren lässt, aber von vielen und ganz bedeutenden Mathematikern nicht mittelst derselben integriert wurde.

So kam Fourier in seiner „*Théorie analytique de la chaleur*“ (1822) pag. 378 zu der Gleichung:

$$x y'' + y' + g x y = 0$$

welche er daselbst mittelst unendlichen Reihen integriert, und diese unendlichen Reihen dann mittelst bestimmten Integralen in geschlossener Form darstellt. Auf diesem Wege findet er ein particuläres Integrale in der Form

$$y = \int_0^{\pi} \cos (x \sqrt{g} \sin r) dr$$

Das zweite particuläre Integrale ermittelt er dann mittelst der Methode der Variation der willkürlichen Constanten.

Im Jahre 1831 kommt Poisson in seinem Werke: „*Nouvelle théorie de l'action capillaire*“ Seite 237 zu derselben Differentialgleichung

$$x y'' + y' = \frac{2}{a^2} x y$$

gibt daselbst das Integrale derselben mittelst bestimmter Integrale an, ohne auf die Laplace'sche Methode hinzuweisen.

Mainardi publicirte im Jahre 1837 in den „*Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto*“ ein Memoire über die Integration der linearen Differentialgleichungen, lehrt daselbst die Integration der Differentialgleichungen von der Form

$$S [(a_r + b_r x) y^{(r)}] = 0$$

mittelst bestimmten Integralen, und betrachtet ausführlich die Gleichung

$$x y'' + 2 a y' - b x y = 0$$

Im selben Jahre erschien im XVII. Bande von Crelle's Journal für Mathematik eine Arbeit von Lobatto über die Integration der Riccati'schen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - c^2 x^n y = 0$$

Lobatto führt in diese Gleichung für x eine neue Variable u in Rechnung mittelst der Substitution

$$u = \frac{2}{n+2} x^{\frac{n}{2}+1} = \frac{x^m}{m}$$

kömmt dadurch zu der Gleichung

$$u \frac{d^2 y}{d u^2} + \frac{m-1}{m} \frac{d y}{d u} - c^2 u y = 0$$

die er nach der Methode von Laplace integrierte, ohne ihn zu erwähnen.

Im Jahre 1844 erschien in Liouville's Journal für Mathematik, Seite 193, ein Memoire von Serret über die Integration von Differentialgleichungen.

In diesem Memoire integrirt Serret die Differentialgleichung

$$x \frac{d^2 y}{d x^2} + 2 n \frac{d y}{d x} - m^2 x y = 0$$

auf mehrere verschiedene Arten, unter andern auch mittelst bestimmter Integrale.

Petzval publicirte im Jahre 1847 in dem I. Bande von Haidingers naturwissenschaftlichen Abhandlungen ein Memoire über die Integration linearer Differentialgleichungen. In diesem Memoire befasst sich Petzval fast ausschliesslich mit der Integration der linearen Differentialgleichungen der Form

$$(a_n + b_n x) y^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} x) y^{(n-1)} + \dots + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

und man muss gestehen, dass sich Petzval tiefer und eingehender mit diesem Gegenstande befasst, als alle seine Vorgänger.

In den Jahren 1853 und 1859 erschienen zwei voluminöse Bände von Petzval, denselben Gegenstand betreffend; sie enthalten eine Fülle von Gedanken und verdienen gewiss weit mehr Beachtung, als ihnen bisher zu Theil wurde.

Im LI. Bande von Crelle's Journal für Mathematik (1856) erschien eine Abhandlung von Weiler über die Integration linearer Differentialgleichungen. In dieser Arbeit beschäftigt sich Weiler unter anderen vornämlich mit der Integration der nachstehenden drei Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2) y &= 0 \\ x^2 y'' + x (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2) y &= 0 \\ x^2 (x + m)^2 y'' + x (x + m) (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2) y &= 0 \end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen wurde schon im Jahre 1761 von Euler in dem VIII. Bande der *Novi commentarii academice Scientiarum imperialis Petropolitanae* Seite 150 mittelst bestimmten Integralen von der Form

$$y = \int P(u + x)^n du$$

integriert, ferner im Jahre 1832 von Liouville, sodann im Jahre 1847 von Petzval. Die zweite dieser Gleichungen ist ein Specialfall der Gleichung

$$x^2 y'' + x (a_1 + b_1 x^m) y' + (a_0 + b_0 x^m + c_0 x^{2m}) y = 0$$

welche sich in der von Petzval im Jahre 1847 publicirten Abhandlung vorfindet.

Die Integration der oben angeführten drei Gleichungen ist Hrn. Weiler nicht geglückt, wohl aber ist ihm gelungen, die erste der erwähnten drei Gleichungen, im Falle $c_0 = 0$ ist, und die zweite Gleichung für den Fall $a_0 = 0$ durch Einführung neuer Variablen auf die Form

$$x y'' + (x - a - b) y' - a y = 0$$

zurückzuführen, so dass man als beachtenswerthes Resultat dieser Arbeit Weiler's den Satz aussprechen kann, dass alle Gleichungen der Form

$$(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

stets durch Einführung neuer Variablen in die Form

$$\xi \frac{d^2 z}{d \xi^2} + (\xi - a - b) \frac{dz}{d \xi} - a z = 0$$

gebracht werden kann.

Ich komme nun zur Besprechung meiner Arbeiten über die Integration der linearen Differentialgleichungen der Form:

$$(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

mit denen ich mich so oft und so anhaltend beschäftigte.

Am 22. Mai 1857, also vor mehr als 20 Jahren, publicirte ich in den Schriften der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien eine Arbeit über diesen Gegenstand. Am 16. Juli und 7. October 1857 erschienen Fortsetzungen derselben Arbeit. Sie brachten mich in peinlichen Conflict mit Prof. Petzval, der sich mit dem gleichen Gegenstande beschäftigte und sich verletzt

fühlte, weil ich die Priorität der von Petzval gelehrt Integrationsmethode dem berühmten Laplace zuschrieb. Im Jahre 1860 publicirte ich „Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen“, im Jahre 1861 und 1862 erschienen Fortsetzungen dieser Arbeiten. Im Jahre 1874 publicirte ich „Neue Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen“, und nun komme ich mit dieser Arbeit, sie der Beachtung und der freundlichen Beurtheilung bestens empfehlend.

Ich setzte nach dem Vorgange von Laplace und Petzval das Integrale der Gleichung

$$(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0 \quad (1)$$

voraus in der Form:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} e^{u x} V du \quad (2)$$

fand dann

$$V = \frac{1}{U_1} \cdot e^{\int \frac{U_0 du}{U_1}} \quad (6)$$

und erhielt zur Bestimmung der Integrationsgrenzen die Gleichung:

$$e^{u x} + \int \frac{U_0 du}{U_1} = 0 \quad (7)$$

In den hier angeführten Formeln haben U_0 und U_1 folgende Bedeutungen:

$$\begin{aligned} U_0 &= a_2 u^2 + a_1 u + a_0 \\ U_1 &= b_2 u^2 + b_1 u + b_0 \end{aligned}$$

Zunächst hat man nun den Bruch

$$\frac{U_0}{U_1}$$

zu betrachten, der, je nach der Beschaffenheit der Constanten a_2 , a_1 , a_0 , b_2 , b_1 und b_0 eine der nachstehenden Formen annimmt:

Es kann erstens

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{u - \alpha} + \frac{B}{u - \beta} \quad (10)$$

sein, es kann zweitens

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{(u - \alpha)^2} + \frac{B}{u - \alpha} \quad (11)$$

sein, es kann drittens

$$\frac{U_0}{U_1} = m + n u + \frac{A}{u - \alpha} \quad (12)$$

sein, und es kann endlich viertens

$$\frac{U_0}{U_1} = a_2 u^2 + a_1 u + a_0 \quad (13)$$

sein.

Jeden dieser vier Specialfälle untersuchte ich sorgfältig. Im ersten Falle, in welchem nämlich

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{u - \alpha} + \frac{B}{u - \beta} \quad (10)$$

ist, gestattet die vorgelegte Differentialgleichung folgende Schreibweise:

$$(m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]y = 0 \quad (14)$$

und nun hängt die Form des Integrales dieser Gleichung vornämlich ab von den beiden Argumenten A und B . Das Integrale dieser Gleichung ist nämlich nach Laplace

$$y = \int_{u_1}^{u_2} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du$$

Die Integrationsgrenzen, welche als constant vorausgesetzt wurden, ergeben sich aus der Gleichung

$$e^{u(m+x)} (u - \alpha)^A (u - \beta)^B = 0 \quad (15)$$

Sind A und B positive Zahlen (ich nenne auch Zahlen der Form $p + q\sqrt{-1}$ positiv, wenn p positiv ist), so genügt man der eben aufgeschriebenen Gleichung für $u = \alpha$ und $u = \beta$, folglich hat man

$$y = \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du \quad (16)$$

Sind A und B reelle, positive und ganze Zahlen, so lässt sich die Integration wirklich durchführen, und man erhält für y einen Ausdruck der Form:

$$y = e^{\beta x} P_1 - e^{\alpha x} P_2$$

unter P_1 und P_2 rationale Functionen von x der Form

$$P = A_0 + \frac{A_1}{m+x} + \frac{A_2}{(m+x)^2} + \frac{A_3}{(m+x)^3} + \dots$$

verstanden. Ich zeigte sodann, dass das vollständige Integrale der vorgelegten Differentialgleichung in diesem Falle die Gestalt

$$y = C_1 e^{\alpha x} P_2 + C_2 e^{\beta x} P_1$$

habe, unter C_1 und C_2 willkürliche Constante verstanden.

Ich versuchte sodann das Integrale (16) in eine unendliche Reihe zu entwickeln, und fand hiefür:

$$y = e^{\alpha \xi} \left[1 + \frac{A}{s} \cdot \gamma \xi + \frac{A(A+1)}{s(s+1)} \cdot \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{s(s+1)(s+2)} \cdot \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] \quad (23)$$

oder auch anders geschrieben:

$$y = e^{\beta \xi} \left[1 - \frac{B}{s} \cdot \gamma \xi + \frac{B(B+1)}{s(s+1)} \cdot \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} - \frac{B(B+1)(B+2)}{s(s+1)(s+2)} \cdot \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] \quad (24)$$

woselbst

$$\xi = m + x$$

$$\gamma = \beta - \alpha$$

$$s = A + B$$

bedeutet. Diese Reihen sind für positive Werthe von A und B , — für welche also das Integrale (16) gültig ist — stets convergent, und genügen auch der vorgelegten Differentialgleichung.

Merkwürdigerweise gelten die Reihen (23) und (24) noch in vielen anderen Fällen, in welchen das Integrale (16) keine Geltung mehr hat.

Ich machte sodann in die Gleichung (14) die Substitution

$$y = (m + x)^{1-A-B} z$$

ich erhielt hiedurch für z eine Differentialgleichung, die genau die Gestalt der Gleichung (14) hat, ich konnte sie demnach integrieren und nachdem ich das Integrale gefunden hatte, ergab sich

$$y = (m + x)^{1-A-B} \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{-B} (u - \beta)^{-A} du \quad (28)$$

und dieses Integrale ist richtig in dem Falle, in welchem $1 - A$ und $1 - B$ positive Zahlen sind *).

Sind A und B reelle, ganze, negative Zahlen, oder ist eine dieser beiden Zahlen Null, die andere aber reell, ganz und negativ, so lässt sich die Integration wirklich durchführen, und man kommt dann wieder für y zu einem Ausdrucke der Form

$$y = C_1 e^{\alpha x} Q_1 + C_2 e^{\beta x} Q_2$$

unter Q_1 und Q_2 rationale Functionen von x , und unter C_1 und C_2 willkürliche Constante verstanden.

Sind $1 - A$ und $1 - B$ positive Zahlen, oder sind sie imaginär, ihre reellen Bestandtheile aber positiv, so lässt sich das in (28) stehende Integrale in eine unendliche Reihe entwickeln, die für jeden Werth von x convergirt. Diese unendliche Reihe hat merkwürdigerweise ein viel grösseres Gebiet der Gültigkeit als das Integrale, aus welchem es hervorging.

Ich stellte sodann das vollständige Integrale der Gleichung (14) für jenen Fall auf, in welchem die beiden Argumente A und B positive echte Brüche sind (oder imaginäre Brüche, deren reelle Bestandtheile die genannte Eigenschaft besitzen) und fand:

*) Die Substitution

$$y = (m + x)^{\lambda} z$$

in die Gleichung (14) ist nicht neu. Wir finden sie in einem Specialfalle schon bei Serret im IX. Bande von Liouville's Journal (1844), woselbst Serret Seite 208 die Gleichung

$$x y'' - 2 n y' + m^2 x y = 0$$

transformirt mittelst der Substitution

$$y = x^{2n+1} z$$

wodurch die gegebene Gleichung übergeht in:

$$x z'' + 2(n+1) z' + m^2 x z = 0$$

wir finden sie ferner bei Weiler im LV. Bande von Crelle's Journal (1858), aber Weiler weiss mit dem, was er hiebei findet, absolut nichts anzufangen.

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du + \\ + C_2 (m + x)^{1-A-B} \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{-B} (u - \beta)^{-A} du \quad (31)$$

oder, falls

$$A + B = 1$$

ist,

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du + \\ + C_2 \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} \log [(m + x) (u - \alpha) (u - \beta)] du \quad (34)$$

und diese Integrale sind wesentlich verschieden von jenen Ausdrücken, die andere Mathematiker, die sich vor mir mit der Integration derselben Differentialgleichung beschäftigten, gefunden haben *).

*) Das Integrale (34), welches logarithmische Bestandtheile enthält, halte ich besonders beachtenswerth. Es waren bis zu dem Momente, als ich zum ersten Male das Integrale (34) aufstellte, meines Wissens nur drei lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung bekannt, die man mittelst geschlossener Formeln integrieren konnte, und in welchen logarithmische Ausdrücke vorkamen; nämlich erstens die von Euler aufgestellte Differentialgleichung

$$x^2 y'' + (2a + 1) x y' + a^2 y = 0$$

in welcher a constant ist, und für welche Euler

$$y = x^{-a} (C_1 + C_2 \log x)$$

findet (siehe Euler's vollständige Anleitung zur Integralrechnung, in's Deutsche übersetzt von Prof. Jos. Salomon, II. Band, §. 848), ferner die Differentialgleichung

$$y'' + \left(-a^2 + \frac{1}{4x^2}\right) y = 0$$

in welcher gleichfalls a constant ist, welche Poisson im Jahre 1823 im XIX. Cahier des *Journals de l'école polytechnique* mittelst der Formel

$$y = C_1 \sqrt{x} \int_0^{\pi} e^{-ax \cos w} dw + C_2 \sqrt{x} \int_0^{\pi} e^{-ax \cos w} \log [x \cos^2 w] dw$$

integrierte, und schliesslich die Differentialgleichung

$$(1 - x^2) y'' - 2x y' + \frac{3}{4} y = 0$$

welche Serret im Jahre 1844 im IX. Bande von Liouville's Journal Seite 216 durch folgende Formel integrierte:

$$y = C_1 \int_0^{\pi} \frac{dw}{\sqrt{x + \cos w}} + C_2 \int_0^{\pi} \frac{dw}{\sqrt{x + \cos w}} \log \frac{\sin w}{\sqrt{x + \cos w}}$$

Ich entwickelte sodann den in (31) stehenden Ausdruck in unendliche Reihen und fand:

$$y = C_1 e^{a\xi} \left[1 + \frac{A}{s} \cdot \gamma \xi + \frac{A(A+1)}{s(s+1)} \cdot \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{s(s+1)(s+2)} \cdot \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] +$$

$$+ C_2 \xi^{1-s} e^{a\xi} \left[1 + \frac{1-B}{2-s} \cdot \gamma \xi + \frac{(1-B)(2-B)}{(2-s)(3-s)} \cdot \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{(1-B)(2-B)(3-B)}{(2-s)(3-s)(4-s)} \cdot \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right]$$

ferner entwickelte ich auch den Ausdruck (34) in unendliche Reihen und fand:

$$y = C_1 e^{a\xi} \left[1 + A\gamma\xi + \frac{A(A+1)}{2!} \cdot \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{3!} \cdot \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] +$$

$$+ C_2 e^{a\xi} \log \xi \left[1 + A\gamma\xi + \frac{A(A+1)}{2!} \cdot \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{3!} \cdot \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] +$$

$$+ C_2 e^{a\xi} \left[A \left(\frac{1}{A} - 2 \right) \gamma \xi + \frac{A(A+1)}{2!} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} - 2 - \frac{2}{2} \right) \cdot \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \right.$$

$$\left. + \frac{A(A+1)(A+2)}{3!} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} + \frac{1}{A+2} - 2 - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} \right) \cdot \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right]$$

In diesen, so wie in den folgenden Entwicklungen bedeutet stets

$$\xi = m + x$$

$$\gamma = \beta - \alpha$$

$$s = A + B$$

und man überzeugt sich leicht, dass die so eben aufgestellten Reihen für jeden Werth von ξ convergiren.

Nachdem mir die Integration der Differentialgleichung (14) für den Fall, in welchem A und B positive echte Brüche sind, vollständig gelang, suchte ich sie in allen übrigen Fällen, in welchen A und B gebrochen sind, auf den eben behandelten Fall zurückzuführen, und dies gelang mir vollständig.

Ich stellte nämlich das vollständige Integrale der Differentialgleichung (14) zuerst für jenen Fall auf, in welchem die beiden Argumente A und B positiv, gebrochen und grösser als 1 sind; dann lehrte ich die Gleichung (14) integrieren für den Fall, in welchem beide Argumente negativ und gebrochen sind, und schliesslich behandelte ich den Fall, in welchem A und B verschieden bezeichnete Brüche sind, und zwar stets sowohl in geschlossener Form in Gestalt von bestimmten Integralen, als auch mittelst unendlichen, für alle Werthe von ξ convergenten Reihen.

Nachdem ich die Integrale der Differentialgleichung (14) für gebrochene Werthe von A und B ermittelt hatte, suchte ich auch das Integrale der Gleichung (14) für jene Fälle anzugeben, in welchen eines der beiden Argumente A oder B , oder beide zugleich reelle und ganze Zahlen sind. So fand ich z. B. in dem Falle, in welchem A eine ganze positive Zahl ist

$$y = e^{ax} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B} \right] \quad (51)$$

und dies Integrale lautet entwickelt folgendermassen:

$$y = \frac{e^{\beta \xi}}{\xi^B} \left[1 - \frac{(A-1)B}{\gamma \xi} + \frac{(A-1)(A-2)B(B+1)}{2! \gamma^2 \xi^2} - \frac{(A-1)(A-2)(A-3)B(B+1)(B+2)}{3! \gamma^3 \xi^3} + \dots \right] \quad (59)$$

so fand ich ferner, dass für den Fall, in welchem $A = 0$ ist, oder in welchem A gleich ist einer reellen, ganzen negativen Zahl

$$y = (m + x)^{1-A-B} e^{\beta x} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}} \left[\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{(m+x)^{1-B}} \right] \quad (61)$$

und dies gibt entwickelt:

$$y = \frac{e^{\alpha \xi}}{\xi^A} \left[1 + \frac{A(B-1)}{\gamma \xi} + \frac{A(A+1)(B-1)(B-2)}{2! \gamma^2 \xi^2} + \frac{A(A+1)(A+2)(B-1)(B-2)(B-3)}{3! \gamma^3 \xi^3} + \dots \right] \quad (60)$$

In letzterem Falle, nämlich in jenem, in welchem $A = 0$ ist, oder in welchem A eine reelle, ganze und negative Zahl bezeichnet, lässt sich die Gleichung (14) auch nach Petzval's Methode integrieren, das Integrale lautet nach derselben:

$$y = \left\{ \frac{d^{-A}}{du^{-A}} \left[(u - \beta)^{B-1} e^{u(m+x)} \right] \right\}_{u=\alpha} \quad (68)$$

und wird dies entwickelt, so kommt man wieder zu der mit (60) bezeichneten Reihe.

Ich habe schliesslich das Integrale der Gleichung (14) in der Form

$$y = e^{\alpha x} \int_{u_1}^{u_2} (x - u)^u \varphi(u) du$$

aufzustellen versucht; ich fand, im Falle $B < 1$ ist,

$$y = e^{\alpha x} \int_0^\infty \left(\xi + \frac{u}{\gamma} \right)^{-A} u^{-B} e^{-u} du \quad (74)$$

und dies führte, in Reihen entwickelt, auf die in (60) stehende Reihe, welche, im Falle sie nicht abbricht, eine divergente ist. Die Entwicklung des Ausdruckes (74) in Reihen, wie ich sie im §. 31 durchführte, ist nicht ganz strenge; ich versuchte auch andere Wege einzuschlagen, aber ich kam stets zu Reihen, die, falls sie nicht abbrachen, divergent waren. Ich habe aus diesem Grunde in meinen weiteren Entwicklungen von dem in (74) stehenden Integrale keinen weiteren Gebrauch gemacht.

Nachdem ich also die Differentialgleichung (14) in allen Fällen integrieren lehrte, will ich nochmals mit wenig Worten den Fall besprechen, in welchem A und B positive echte Brüche sind. Ich fand in diesem Falle für y folgenden Werth:

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du + \\ + C_2 (m + x)^{1-A-B} \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{-B} (u - \beta)^{-A} du \quad (31)$$

Alle Mathematiker, welche sich vor mir mit der Integration derselben Differentialgleichung beschäftigten, schreiben für positive Werthe von A und B das Integrale in anderer Form auf, sie erhielten nämlich für positive Werthe von $m + x$:

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du + C_2 \int_{\alpha}^{-\infty} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du$$

und für negative Werthe von $m + x$:

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du + C_2 \int_{\alpha}^{+\infty} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du \quad (75)$$

Die beiden Integrale sagten mir nicht zu. Die von mir aufgestellten Integrale leisten der Differentialgleichung Genüge, ob $m + x$ positiv oder negativ, reell oder imaginär ist, und lassen sich mit Leichtigkeit in convergente Reihen entwickeln. Die Integrale aber, welche die Grenze ∞ haben, sind nur richtig, wenn $m + x$ positiv ist, oder nur wenn $m + x$ negativ ist, und führen entwickelt zu divergenten Reihen. Ich muss freilich gestehen, dass die im §. 33 gegebene Reihenentwicklung nicht ganz correct ist, aber mir ist es leider nicht gelungen, die erwähnten Integrale auf correcte Weise in convergente Reihen zu entwickeln; in Werken anderer Autoren fand ich auch nichts *) darüber gesagt.

Im zweiten Specialfalle, in welchem nämlich

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{(u - \alpha)^2} + \frac{B}{u - \alpha}$$

ist, hat die zu integrirende Differentialgleichung die Gestalt:

$$(m + x) y'' + [B - 2\alpha(m + x)] y' + [A - B\alpha + \alpha^2(m + x)] y = 0 \quad (77)$$

Hier führt die Laplace'sche Methode, direct angewandt, zu keinem brauchbaren Integrale der Gleichung; ich musste, um diese Gleichung zu integriren, successive die beiden Substitutionen machen:

$$y = e^{\alpha x} z$$

und

$$m + x = \xi^2$$

*) Eine einzige Ausnahme bildet Poisson's „Nouvelle théorie de l'action capillaire“ (1831), woselbst Seite 237 die Differentialgleichung

$$t \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} = \frac{2}{a^2} t z$$

integrirt wird (siehe §. 91 dieser Vorlesungen).

hiedurch komme ich auf die Gleichung

$$\xi \frac{d^2 z}{d\xi^2} + (2B - 1) \frac{dz}{d\xi} + 4A \xi z = 0$$

welche ein Specialfall der Gleichung (14) ist und sich daher stets leicht integrieren lässt.

Im Falle $B - \frac{1}{2}$ Null ist oder eine reelle, ganze positive Zahl, stellte ich das Integrale der Gleichung (77) in der Form

$$y = e^{\alpha x} \frac{d^{B-\frac{1}{2}}}{dx^{B-\frac{1}{2}}} \left[C_1 e^{+2\sqrt{-A(m+x)}} + C_2 e^{-2\sqrt{-A(m+x)}} \right]$$

auf, und im Falle $\frac{3}{2} - B$ Null ist, oder im Falle $\frac{3}{2} - B$ eine reelle, ganze positive Zahl ist, fand ich

$$y = (m+x)^{1-B} e^{\alpha x} \frac{d^{\frac{3}{2}-B}}{dx^{\frac{3}{2}-B}} \left[C_1 e^{+2\sqrt{-A(m+x)}} + C_2 e^{-2\sqrt{-A(m+x)}} \right]$$

Im dritten Specialfalle, in welchem

$$\frac{U_0}{U_1} = m + nu + \frac{A}{u-\alpha}$$

ist, hat die zu integrierende Gleichung die Form:

$$n y'' + (m+x-n\alpha) y' + [A-\alpha(m+x)] y = 0 \quad (89)$$

Um sie zu integrieren, setze ich vorerst

$$y = e^{\alpha x} z$$

und sodann

$$m+x+n\alpha = \xi \sqrt{-n}$$

Die Gleichung (89) geht hiedurch über in:

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} + Az \quad (97)$$

Ist A positiv, so lässt sich dieselbe nach Laplace's Methode integrieren und liefert folgenden Werth für z :

$$z = \int_0^\infty \lambda^{A-1} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} (C_1 e^{+\lambda\xi} + C_2 e^{-\lambda\xi}) d\lambda$$

ist A negativ, so lässt sich die Gleichung (97) nicht mehr nach der Methode von Laplace integrieren; ich fand nach einer neuen, von mir herrührenden Methode für z , im Falle A eine ganze negative Zahl ist, folgenden Werth:

$$z = C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2 \xi^2}{2!} - \frac{u^3 \xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{-A} \xi^{-A}}{(-A)!}}{u^{1-A}} - \right. \\ \left. - \frac{\xi^{-A-1}}{(-A-1)!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\xi^{-A-3}}{(-A-3)!} - \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \frac{\xi^{-A-5}}{(-A-5)!} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{\xi^{-A-7}}{(-A-7)!} - \dots \right] du + \\ + C_2 \left[\frac{\xi^{-A}}{(-A)!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi^{-A-2}}{(-A-2)!} + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\xi^{-A-4}}{(-A-4)!} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\xi^{-A-6}}{(-A-6)!} + \dots \right]$$

und im Falle A eine gebrochene negative Zahl ist, wählte ich eine ganze positive Zahl μ derart, dass $A + \mu$ ein positiver echter Bruch wird, und fand, wenn man der Kürze halber $A + \mu = A_1$ setzt,

$$\begin{aligned}
 z = & C_1 \int_0^{+\infty} u^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2 \xi^2}{2!} - \frac{u^3 \xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{\mu-1} \xi^{\mu-1}}{(\mu-1)!} + \right. \\
 & + u^{\mu+1} \left(\frac{\xi^{\mu-1}}{(A_1-1) \cdot (\mu-1)!} + \frac{\xi^{\mu-3}}{(A_1-1)(A_1-3) \cdot (\mu-3)!} + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\xi^{\mu-5}}{(A_1-1)(A_1-3)(A_1-5) \cdot (\mu-5)!} + \dots \right) + \right. \\
 & + u^{\mu} \left(\frac{\xi^{\mu-2}}{(A_1-2) \cdot (\mu-2)!} + \frac{\xi^{\mu-4}}{(A_1-2)(A_1-4) \cdot (\mu-4)!} + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\xi^{\mu-6}}{(A_1-2)(A_1-4)(A_1-6) \cdot (\mu-6)!} + \dots \right) \right] du \\
 & + C_2 \int_0^{-\infty} u^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2 \xi^2}{2!} - \frac{u^3 \xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{\mu-1} \xi^{\mu-1}}{(\mu-1)!} + \right. \\
 & + u^{\mu+1} \left(\frac{\xi^{\mu-1}}{(A_1-1) \cdot (\mu-1)!} + \frac{\xi^{\mu-3}}{(A_1-1)(A_1-3) \cdot (\mu-3)!} + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\xi^{\mu-5}}{(A_1-1)(A_1-3)(A_1-5) \cdot (\mu-5)!} + \dots \right) + \right. \\
 & + u^{\mu} \left(\frac{\xi^{\mu-2}}{(A_1-2) \cdot (\mu-2)!} + \frac{\xi^{\mu-4}}{(A_1-2)(A_1-4) \cdot (\mu-4)!} + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\xi^{\mu-6}}{(A_1-2)(A_1-4)(A_1-6) \cdot (\mu-6)!} + \dots \right) \right] du
 \end{aligned}$$

Sämmtliche hier stehenden Integrale führen entwickelt auf die Reihe:

$$\begin{aligned}
 z = & C_1 \left[1 + A \cdot \frac{\xi^2}{2!} + A(A+2) \cdot \frac{\xi^4}{4!} + A(A+2)(A+4) \cdot \frac{\xi^6}{6!} + \dots \right] + \\
 & + C_2 \left[\xi + (A+1) \cdot \frac{\xi^3}{3!} + (A+1)(A+3) \cdot \frac{\xi^5}{5!} + (A+1)(A+3)(A+5) \cdot \frac{\xi^7}{7!} + \dots \right]
 \end{aligned}$$

Ich habe dann die Gleichung (89) noch auf andere Art integrirt und komme, im Falle A eine reelle, ganze positive Zahl ist, zu dem Integrale:

$$y = e^{ax} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \right]$$

und im Falle $A = 0$ ist, oder eine reelle, ganze negative Zahl, zu

$$y = e^{-\frac{(m+x)^2}{2n}} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}} \left[e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \right]$$

Nach der von Petzval herrührenden Methode gelangt man im letzteren Falle zu der Formel:

$$y = \left\{ \frac{d^{-A}}{du^{-A}} \left[e^{u(m+x) + \frac{n}{2} u^2} \right] \right\}_{u=a}$$

Ich habe noch einen andern Weg eingeschlagen, um das Integrale der Gleichung (89) zu erhalten. Ich setze nämlich

$$y = e^{\alpha x} z$$

und dann

$$\xi = (m + x + n\alpha)^2$$

und komme hiedurch zu der Gleichung:

$$4n\xi \frac{d^2 z}{d\xi^2} + 2(n + \xi) \frac{dz}{d\xi} + Az = 0$$

welche ein Specialfall der Gleichung (14), und daher leicht zu integrieren ist.

Ich komme endlich zum letzten Specialfalle, in welchem nämlich die zu integrierende Gleichung die Gestalt

$$a_2 y'' + a_1 y' + (a_0 + x) y = 0 \quad (141)$$

hat. Diese lässt sich vollständig nach der Methode von Laplace behandeln.

Nachdem ich dies gezeigt, lehrte ich noch eine andere Integrationsmethode. Ich setzte nämlich in die Gleichung (141)

$$y = e^{\lambda x} \cdot z$$

und dann

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 + x = \xi^{\frac{2}{3}}$$

ich kam dann zu der Gleichung:

$$9a_2 \xi \frac{d^2 z}{d\xi^2} + 3a_2 \frac{dz}{d\xi} + 4\xi z = 0$$

und diese ist wieder ein Specialfall der Gleichung (14).

Nachdem ich die Gleichungen der Form (1) vollständig integrierte, gebe ich im zweiten Abschnitte dieses Buches eine Sammlung von Beispielen.

Ich integriere zuerst die Riccati'sche Gleichung

$$y'' = x^m y \quad (153)$$

und zwar nicht nur nach den Methoden, die ich im I. Abschnitte meines Buches lehrte, sondern auch im Falle m eine reelle, ganze positive Zahl ist, nach der im XIX. Bande von Crelle's Journal für Mathematik von Kummer gelehrt Methode, nach welcher das Integrale der Gleichung (153) in Form von mehrfachen Integralen auftritt.

Gerne hätte ich auch hier die Integration der Liouville'schen Gleichung

$$x^{\frac{n}{2}} y^{(n)} = y$$

gezeigt, welche ich schon im Jahre 1860 in meinen „Studien über die Inte-

gration linearer Differentialgleichungen“ auf eigenthümliche Art integrierte, und welche ich daselbst, im Falle sie in der Form

$$x^{m+\frac{1}{2}} y^{(2m+1)} = y$$

auftritt, integrierte mittelst der Formel:

$$y = x^{m+\frac{1}{2}} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \left[C_1 e^{2\lambda_1 Vx} + C_2 e^{2\lambda_2 Vx} + \dots + C_{2m+1} e^{2\lambda_{2m+1} Vx} \right]$$

und im Falle sie die Form

$$x^m y^{(2m)} = y$$

hat, auf die Integration von Differentialgleichungen der Form

$$x y'' + (1 - m) y' - \mu y = 0$$

zurückführte, woselbst μ eine m^{te} Wurzel der Einheit ist, aber ich unterliess dies, weil ich ja doch nichts anderes darüber zu sagen wusste, als was ich bereits im Jahre 1860 sagte. Lommel hat im II. Bande der „Mathematischen Annalen“ von Clebsch und Neumann sich gleichfalls mit der Integration der Liouville'schen Gleichung befasst und dieselbe mittelst Bessel'schen Functionen integrirt, scheint aber in seiner Arbeit übersehen zu haben, dass ich die Integration der Differentialgleichung

$$x^m y^{(2m)} = y$$

im Falle m eine ganze positive Zahl ist, stets auf die Gleichung

$$x y'' + (1 - m) y' - \mu y = 0$$

zurückführte, welche sich ja immer mittelst bestimmten Integralen — und das sind ja auch die Bessel'schen Functionen — integrieren lässt. Sodann wandte ich mich an die Integration der Gleichung

$$y'' = x^m (x y' + \lambda y)$$

welche sich ebenfalls auf Gleichungen der Form (14) zurückführen lässt, und zeigte dies an mehreren mir passend scheinenden speciellen Beispielen. Ich erweiterte dann die Kummer'sche Methode und integrierte wieder specielle Beispiele nach der von mir erweiterten Kummer'schen Methode.

Mit der Integration von Gleichungen, die früher von Fourier und Poisson integrirt wurden, schloss ich diesen Abschnitt.

Der dritte Abschnitt enthält Aphorismen aus dem Gebiete der Differentialgleichungen. Es sind dies kleinere Arbeiten aus den verschiedensten Theilen des Gebietes der Differentialgleichungen, die ich zum grössten Theile hier zum ersten Male publicire und die ich unter obigem Titel zusammenstellte. Aus dem Lesen des am Schlusse dieser Schrift gegebenen Inhaltes sieht man am schnellsten, was dieser Abschnitt enthält.

Ich könnte nun schliessen, mir obliegt aber nun noch die peinliche Aufgabe, die Angriffe zurückzuweisen, die in den letzten Jahren von zwei Seiten gegen meine Arbeiten gerichtet wurden.

Ich werde auf diese Angriffe nicht hier, noch in jenem Theile meiner Arbeiten antworten, welcher wissenschaftlichen Ausführungen gewidmet ist, denn die — gelinde gesagt — crasse Unwissenschaftlichkeit dieser Angriffe gestattet nicht, bei einer streng wissenschaftlichen Darstellung auf dieselben zu reflectiren. Die verdiente Abfertigung mögen sie im Anhange finden, auf welchen ich hiemit verweise.

Wien, im August 1878.

Prof. Simon Spitzer.

Erster Abschnitt.

Einleitung.

Integration der linearen Differentialgleichung

$$(a_2 + b_2 x) \frac{d^2 y}{dx^2} + (a_1 + b_1 x) \frac{dy}{dx} + (a_0 + b_0 x) y = 0 \quad (1)$$

in welcher

a_2, a_1, a_0, b_2, b_1 und b_0
constante Zahlen bezeichnen.

§. 1.

Laplace *) setzt das Integrale der Gleichung (1) voraus in folgender Gestalt:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V du \quad (2)$$

wo V eine, einstweilen noch unbestimmte Function von u bedeutet, und u_1 und u_2 constante, einstweilen noch unbestimmte Zahlen sind.

Aus (2) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \int_{u_1}^{u_2} u e^{ux} V du \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \int_{u_1}^{u_2} u^2 e^{ux} V du \end{aligned}$$

*) Siehe in dem Werke „*Histoire de L'académie Royale des sciences Année 1782*“ den Artikel „*Sur une nouvelle Méthode d'approximation*“, pag. 47“, woselbst Laplace die Gleichung

$$(a_n + b_n x) \frac{d^n y}{dx^n} + (a_{n-1} + b_{n-1} x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

nach der oben gegebenen Methode integrirt.

und setzt man der Kürze halber (ich wähle hier durchgehends die von Herrn Prof. Petzval angenommenen Bezeichnungen *)

$$\begin{aligned} a_2 u^2 + a_1 u + a_0 &= U_0 \\ b_2 u^2 + b_1 u + b_0 &= U_1 \end{aligned}$$

so ist das Resultat der Substitution von (2) in die Gleichung (1)

$$\int_{u_1}^{u_2} (U_0 + U_1 x) e^{ux} V du = 0 \quad (3)$$

Das zweite Glied dieses Ausdruckes, nämlich

$$\int U_1 x e^{ux} V du$$

lässt sich folgendermassen schreiben:

$$\int U_1 x e^{ux} V du = \int U_1 V \frac{d e^{ux}}{d u} du$$

und dies gibt, nach der Methode des theilweisen Integrirens behandelt:

$$\int_{u_1}^{u_2} U_1 x e^{ux} V du = \{e^{ux} U_1 V\}_{u_1}^{u_2} - \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} \frac{d(U_1 V)}{d u} du$$

Wird dies in die Gleichung (3) eingeführt, so erhält man:

$$\{e^{ux} U_1 V\}_{u_1}^{u_2} + \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} \left[U_0 V - \frac{d(U_1 V)}{d u} \right] du = 0,$$

welche Gleichung identisch stattfinden soll. Man erreicht dies, wenn man das bisher unbestimmt gelassene V so wählt, auf dass

$$U_0 V - \frac{d(U_1 V)}{d u} = 0 \quad (4)$$

wird, und wenn man für u_1 und u_2 solche constante Zahlen setzt, welche der Gleichung

$$e^{ux} U_1 V = 0 \quad (5)$$

genügen **).

Aus (4) folgt:

$$d(U_1 V) = U_0 V du$$

und wenn man beiderseits durch $U_1 V$ dividirt,

$$\frac{d(U_1 V)}{U_1 V} = \frac{U_0}{U_1} du$$

*) Petzval: Integration der linearen Differentialgleichungen I. Band, 1853.

„ in Haidinger's naturwissenschaftlichen Abhandlungen I. Band, 1847.

**) Petzval glaubt (s. dessen Werk „Integration der linearen Differentialgleichungen I. Band, Seite 42“), dass man zur Bestimmung der Grenzen auch

$$e^{ux} U_1 V = A$$

setzen könne, unter A eine beliebige, auch von Null verschiedene Grösse verstanden. Aber dies ist unrichtig, denn aus dieser Gleichung würde u als Function von x folgen, was im Widerspruche mit der Voraussetzung constanter Integrationsgrenzen steht.

Integriert man nun beiderseits, so erhält man:

$$\log (U_1 V) = \int \frac{U_0 du}{U_1}$$

hieraus folgt:

$$U_1 V = e^{\int \frac{U_0 du}{U_1}}$$

und hieraus

$$V = \frac{1}{U_1} \cdot e^{\int \frac{U_0 du}{U_1}} \quad (6)$$

Nachdem wir V gefunden, setzen wir den gefundenen Werth in die Gleichung (5), dadurch geht diese über in:

$$e^{ux + \int \frac{U_0 du}{U_1}} = 0 \quad (7)$$

und diese Gleichung liefert, nach u aufgelöst, die beiden Grenzen u_1 und u_2 . Das Integrale der Gleichung (1) ist demnach:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{U_1} \cdot e^{ux + \int \frac{U_0 du}{U_1}} \cdot du \quad (8)$$

woselbst u_1 und u_2 solche constante Zahlen bezeichnen, welche die Gleichung (7) zu einer identischen machen *).

§. 2.

Will man das in (8) aufgestellte y weiter entwickeln, so hat man vor allem das Integrale

$$\int \frac{U_0 du}{U_1}$$

zu ermitteln, und dieses Integrale nimmt verschiedene Formen an, je nach der Beschaffenheit des Bruches

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{a_2 u^2 + a_1 u + a_0}{b_2 u^2 + b_1 u + b_0} \quad (9)$$

Dieser Bruch kann nämlich folgende vier verschiedene Formen annehmen:

Erstens, es kann sein, dass

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{u - \alpha} + \frac{B}{u - \beta} \quad (10)$$

*) Auch für die Gleichung

$$(a_n + b_n x) y^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} x) y^{(n-1)} + \dots + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

ergibt sich der in (8) stehende Werth von y , nur haben in diesem Falle U_0 und U_1 folgende Bedeutungen:

$$U_0 = a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \dots + a_1 u + a_0$$

$$U_1 = b_n u^n + b_{n-1} u^{n-1} + \dots + b_1 u + b_0$$

siehe Petzval's Integration der linearen Differentialgleichungen I. Band, Seite 38.

ist, dies findet statt, wenn die Gleichung

$$U_1 = 0$$

zwei von einander verschiedene Wurzeln α und β hat.

Zweitens, es kann sein, dass

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{(u - \alpha)^2} + \frac{B}{u - \alpha} \quad (11)$$

ist; dies findet statt, wenn die Gleichung

$$U_1 = 0$$

zwei gleiche Wurzeln $u = \alpha$ hat.

Drittens, es kann sein, dass

$$\frac{U_0}{U_1} = m + nu + \frac{A}{u - \alpha} \quad (12)$$

ist, dies findet statt, wenn $b_2 = 0$ ist; endlich

Viertens, es kann sein, dass

$$\frac{U_0}{U_1} = a_2 u^2 + a_1 u + a_0 \quad (13)$$

ist, dies findet statt, wenn

$$b_2 = b_1 = 0$$

ist.

Erstes Capitel.

§. 3.

Betrachten wir vorerst den ersten Fall, den nämlich, in welchem

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{u - \alpha} + \frac{B}{u - \beta} \quad (10)$$

ist. Bevor wir aber in eine nähere Untersuchung dieses Falles eingehen, wollen wir in die Gleichung (1) statt den Constanten

$$a_2, a_1, a_0, b_2, b_1 \text{ und } b_0$$

folgende andere Constante

$$m, A, B, \alpha \text{ und } \beta$$

eingeführen, und dies geht leicht, wenn man bedenkt, dass

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{a_2 u^2 + a_1 u + a_0}{b_2 u^2 + b_1 u + b_0} = m + \frac{A}{u - \alpha} + \frac{B}{u - \beta}$$

und somit

$$U_1 = b_2 u^2 + b_1 u + b_0 = b_2 (u - \alpha) (u - \beta)$$

ist; denn aus diesen Gleichungen, welche identisch sind, ergeben sich folgende Werthe für a_2, a_1, a_0, b_2, b_1 und b_0

$$a_2 = b_2 m$$

$$a_1 = b_2 [A + B - m(\alpha + \beta)]$$

$$a_0 = b_2 [-A\beta - B\alpha + m\alpha\beta]$$

$$b_1 = -b_2(\alpha + \beta)$$

$$b_0 = b_2 \alpha \beta$$

Werden diese Werthe in die Gleichung (1) eingeführt, so kommt man zu der Gleichung:

$$(m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)]y=0 \quad (14)$$

und diese Gleichung ist nun zunächst der Gegenstand unserer Untersuchungen.

§. 4.

Wird die Gleichung (14) nach der im §. 1 angeführten Laplace'schen Methode integrirt, so hat man vor allem den Werth von

$$\int \frac{U_0}{U_1} du$$

zu ermitteln.

Nun ist vermöge der Gleichung (10)

$$\int \frac{U_0}{U_1} du = mu + A \log(u-\alpha) + B \log(u-\beta)$$

Ferner kommt man, vermöge der Gleichung (6), da

$$U_1 = b_2 (u-\alpha)(u-\beta)$$

ist, wenn man den constanten Factor b_2 unberücksichtigt lässt, auf

$$V = e^{mu} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1}$$

und die Gleichung (7), welche zur Bestimmung der Integrationsgrenzen dient, lautet nun:

$$e^{u(m+x)} (u-\alpha)^A (u-\beta)^B = 0 \quad (15)$$

Aus ihr folgen, wenn A und B positive Zahlen bedeuten, oder wenn A und B imaginäre Zahlen sind und von der Form

$$\begin{aligned} A &= p + q\sqrt{-1} \\ B &= p - q\sqrt{-1} \end{aligned}$$

p aber positiv ist *),

$$u = \alpha \quad \text{und} \quad u = \beta$$

folglich ist das Integrale der vorgelegten Gleichung:

$$y = \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du \quad (16)$$

§. 5.

Sind A und B reell, ganz und positiv, so lässt sich die Integration des in (16) stehenden Integrales leicht durchführen, denn man erhält, wenn man von folgender Formel Gebrauch macht:

*) Laplace, Mainardi**) und Petzval genügen der Gleichung (15) auch durch unendlich grosse Werthe von u , und zwar, wenn $m+x$ positiv ist, durch $u = -\infty$; wenn hingegen $m+x$ negativ ist, durch $u = +\infty$; ich glaubte diese vom Zeichen von x abhängigen unendlichen Grenzen ganz unbeachtet lassen zu müssen, weil meiner Ansicht nach jedes Integrale ihrer Differentialgleichung genügen müsse, wie immer auch x beschaffen sei, ob dies nun positiv oder negativ, reell oder imaginär ist.

**) Mainardi, *Annali del Regno Lombardo-Veneto*, Tom. VII, pag. 135, 1837.

Mainardi, *Annali di Scienze Matematiche et Fisiche*, compilati da Barnaba Tortolini, Tom. I, pag. 58, 1850.

$$\int e^{u(m+x)} \varphi(u) du = e^{u(m+x)} \left[\frac{\varphi(u)}{m+x} - \frac{\varphi'(u)}{(m+x)^2} + \frac{\varphi''(u)}{(m+x)^3} - \dots \right]$$

von deren Richtigkeit man sich durch wirkliches Differenziren überzeugen kann, für y nachstehenden Ausdruck:

$$y = e^{\beta(m+x)} \left[\frac{\varphi(\beta)}{m+x} - \frac{\varphi'(\beta)}{(m+x)^2} + \frac{\varphi''(\beta)}{(m+x)^3} - \dots \right] - e^{\alpha(m+x)} \left[\frac{\varphi(\alpha)}{m+x} - \frac{\varphi'(\alpha)}{(m+x)^2} + \frac{\varphi''(\alpha)}{(m+x)^3} - \dots \right] \quad (17)$$

in welchem

$$\varphi(u) = (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1}$$

ist, und in welchem, weil $\varphi(u)$ eine ganze algebraische Function von u ist, die in den eckigen Klammern stehenden Polynome abbrechen, somit von endlicher Gestalt sind.

Ja es lässt sich sogar sehr leicht nachweisen, dass jeder der beiden Bestandtheile der Gleichung (17) für sich der vorgelegten Differentialgleichung genügt, nämlich es lässt sich zeigen, dass sowohl

$$y_1 = e^{\beta(m+x)} \left[\frac{\varphi(\beta)}{m+x} - \frac{\varphi'(\beta)}{(m+x)^2} + \frac{\varphi''(\beta)}{(m+x)^3} - \dots \right] \quad (18)$$

als auch

$$y_2 = e^{\alpha(m+x)} \left[\frac{\varphi(\alpha)}{m+x} - \frac{\varphi'(\alpha)}{(m+x)^2} + \frac{\varphi''(\alpha)}{(m+x)^3} - \dots \right] \quad (19)$$

particuläre Integrale der Gleichung (14) sind. Denn setzt man in diese Gleichung für y seinen in (18) stehenden Werth, so hat das Substitutionsresultat offenbar die Form:

$$e^{\beta(m+x)} \left[A_0 + \frac{A_1}{m+x} + \frac{A_2}{(m+x)^2} + \frac{A_3}{(m+x)^3} + \dots \right]$$

woselbst das in den eckigen Klammern stehende Polynom geschlossen ist, und $A_0, A_1, A_2, A_3 \dots$ constante Zahlen bedeuten; eben so führt die Substitution von $y = y_2$ in die Gleichung (14) zu einem Ausdrucke von folgender Gestalt:

$$e^{\alpha(m+x)} \left[B_0 + \frac{B_1}{m+x} + \frac{B_2}{(m+x)^2} + \frac{B_3}{(m+x)^3} + \dots \right]$$

wo ebenfalls das in den eckigen Klammern stehende Polynom geschlossen, und $B_0, B_1, B_2, B_3 \dots$ constante Zahlen sind; also muss das Substitutionsresultat von dem in (17) stehenden y sein:

$$e^{\beta(m+x)} \left[A_0 + \frac{A_1}{m+x} + \frac{A_2}{(m+x)^2} + \frac{A_3}{(m+x)^3} + \dots \right] - e^{\alpha(m+x)} \left[B_0 + \frac{B_1}{m+x} + \frac{B_2}{(m+x)^2} + \frac{B_3}{(m+x)^3} + \dots \right]$$

Dies soll aber Null sein, weil das in (17) stehende y ein Integrale der Gleichung (14) ist. Ich behaupte nun, dies kann nur dann Null sein, wenn der erste Theil für sich, und der zweite Theil ebenfalls für sich Null ist, denn sonst würde aus der Gleichung:

$$e^{\beta(m+x)} \left[A_0 + \frac{A_1}{m+x} + \frac{A_2}{(m+x)^2} + \frac{A_3}{(m+x)^3} + \dots \right] - e^{\alpha(m+x)} \left[B_0 + \frac{B_1}{m+x} + \frac{B_2}{(m+x)^2} + \frac{B_3}{(m+x)^3} + \dots \right] = 0$$

folgen:

$$e^{(\beta-\alpha)(m+x)} = \frac{B_0 + \frac{B_1}{m+x} + \frac{B_2}{(m+x)^2} + \frac{B_3}{(m+x)^3} + \dots}{A_0 + \frac{A_1}{m+x} + \frac{A_2}{(m+x)^2} + \frac{A_3}{(m+x)^3} + \dots}$$

was nicht wahr ist, weil eine Exponentialgrösse nicht einem algebraischen rationalen Bruche gleich sein kann.

Da also die beiden Substitutionsresultate jedes für sich verschwindet, so sind die in (18) und (19) stehenden Werthe von y_1 und y_2 particuläre Integrale der Gleichung (14). Der in diesem §. gefundene Satz lautet demnach folgendermassen:

Sind A und B reell, ganz und positiv, so ist

$$\varphi(u) = (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1}$$

ein ganzes algebraisches Polynom, und das vollständige Integrale der Gleichung (14) ist in diesem Falle:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \left[\frac{\varphi(\alpha)}{m+x} - \frac{\varphi'(\alpha)}{(m+x)^2} + \frac{\varphi''(\alpha)}{(m+x)^3} - \dots \right] + C_2 e^{\beta x} \left[\frac{\varphi(\beta)}{m+x} - \frac{\varphi'(\beta)}{(m+x)^2} + \frac{\varphi''(\beta)}{(m+x)^3} - \dots \right] \quad (20)$$

woselbst C_1 und C_2 willkürliche Constante bezeichnen.

§. 6.

Das Integrale

$$y = \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du \quad (16)$$

welches der Gleichung (14) für den Fall genügt, in welchem A und B positive Zahlen sind, oder in welchem A und B imaginäre Zahlen sind, jedoch mit reellen positiven Bestandtheilen, lässt sich stets in eine unendliche, nach aufsteigenden Potenzen von $m+x$ geordnete convergente Reihe entwickeln. Um dies einzusehen, setze man in (16)

$$u = \alpha + (\beta - \alpha) \omega$$

wo ω eine neue Variable bezeichnet; alsdann erhält man, wenn man den constanten Factor

$$(-1)^A (\alpha - \beta)^{A+B-1}$$

ausser Acht lässt:

$$y = e^{\alpha(m+x)} \int_0^1 e^{(\beta-\alpha)(m+x)\omega} \omega^{A-1} (1-\omega)^{B-1} d\omega$$

Setzt man nun der Kürze halber

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \gamma \\ m + x &= \xi \end{aligned}$$

und setzt man sodann für die Exponentialgrösse $e^{\gamma \xi \omega}$ die ihr entsprechende unendliche Reihe, so erhält man

$$y = e^{a\xi} \int_0^1 \omega^{A-1} (1 - \omega)^{B-1} \left[1 + \gamma \omega \xi + \frac{\gamma^2 \omega^2 \xi^2}{2!} + \frac{\gamma^3 \omega^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] d\omega$$

Nun ist bekanntlich für positive Werthe von a und b *)

*) Die Formel (21), welche von Euler herrührt, wurde von verschiedenen Mathematikern auf verschiedene Arten bewiesen. Ich gebe nachstehend einen von mir herrührenden Beweis dieses Satzes, den ich im Jahre 1876 in der Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Hamburg vortrug.

Es ist bekanntlich

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-u} u^{a-1} du$$

Setzt man hierin x^2 für u , so hat man:

$$\Gamma(a) = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2a-1} dx$$

auf gleiche Weise hat man:

$$\Gamma(b) = 2 \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2b-1} dy$$

Durch Multiplication der beiden letzten Gleichungen kömmt man zu der Gleichung:

$$\Gamma(a) \Gamma(b) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} x^{2a-1} y^{2b-1} dx dy$$

Denkt man sich hier x und y als rechtwinklige Coordinaten, und verfolgt man denselben Weg, den Poisson in seinem Lehrbuche der Mechanik bei Gelegenheit der Entwicklung von $\Gamma(\frac{1}{2})$ befolgt, so hat man:

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad dx dy = r dr d\varphi$$

setzend

$$\Gamma(a) \Gamma(b) = 4 \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r^{2a+2b-1} \cos^{2a-1} \varphi \sin^{2b-1} \varphi dr d\varphi$$

Dies lässt sich so schreiben:

$$\Gamma(a) \Gamma(b) = 4 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2a+2b-1} dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2a-1} \varphi \sin^{2b-1} \varphi d\varphi$$

oder auch so:

$$\Gamma(a) \Gamma(b) = 2 \Gamma(a+b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2a-1} \varphi \sin^{2b-1} \varphi d\varphi$$

Setzt man in dem hier vorkommenden Integrale

$$\cos^2 \varphi = u, \quad \sin^2 \varphi = 1 - u$$

so erhält man:

$$\int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

$$\int_0^1 \omega^{a-1} (1 - \omega)^{b-1} d\omega = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (21)$$

folglich ist:

$$y = e^{\alpha \xi} \left\{ \frac{\Gamma(A) \Gamma(B)}{\Gamma(A+B)} + \gamma \xi \cdot \frac{\Gamma(A+1) \Gamma(B)}{\Gamma(A+B+1)} + \right. \\ \left. + \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} \cdot \frac{\Gamma(A+2) \Gamma(B)}{\Gamma(A+B+2)} + \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} \cdot \frac{\Gamma(A+3) \Gamma(B)}{\Gamma(A+B+3)} + \dots \right\}$$

und wenn man berücksichtigt, dass für ganze und positive Werthe von n die Gleichung:

$$\Gamma(A+n) = A(A+1)(A+2) \dots (A+n-1) \Gamma(A) \quad (22)$$

statt hat, so erhält man, wenn man in obiger Reihe durchgehends

$$\frac{\Gamma(A) \Gamma(B)}{\Gamma(A+B)}$$

als Factor heraushebt und denselben, weil er constant ist, ausser Acht lässt; wenn man ferner der Kürze halber

$$A+B=s$$

setzt, für y folgende Reihe:*)

$$y = e^{\alpha \xi} \left[1 + \frac{A}{s} \cdot \gamma \xi + \frac{A(A+1)}{s(s+1)} \cdot \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{s(s+1)(s+2)} \cdot \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] \quad (23)$$

Vertauscht man in dieser Reihe A mit B und gleichzeitig α mit β , so erhält man, da durch diese Vertauschung sich γ in $-\gamma$ umwandelt, als Entwicklung des Integrales (16) auch folgende Reihe:

$$y = e^{\beta \xi} \left[1 - \frac{B}{s} \cdot \gamma \xi + \frac{B(B+1)}{s(s+1)} \cdot \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} - \frac{B(B+1)(B+2)}{s(s+1)(s+2)} \cdot \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] \quad (24)$$

welche offenbar mit der Reihe (23) identisch ist.

§. 7.

Das Integrale

$$y = \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du \quad (16)$$

welches der linearen Differentialgleichung (14) in dem Falle genügt, in welchem A und B positive Zahlen sind, oder in welchem A und B imaginäre Zahlen sind, jedoch mit positiven reellen Bestandtheilen, gibt, wie im vorhergehenden §. gezeigt wurde, entwickelt die Reihe:

$$y = e^{\alpha \xi} \left[1 + \frac{A}{s} \cdot \gamma \xi + \frac{A(A+1)}{s(s+1)} \cdot \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{s(s+1)(s+2)} \cdot \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] \quad (23)$$

oder auch folgende andere:

$$y = e^{\beta \xi} \left[1 - \frac{B}{s} \cdot \gamma \xi + \frac{B(B+1)}{s(s+1)} \cdot \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} - \frac{B(B+1)(B+2)}{s(s+1)(s+2)} \cdot \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] \quad (24)$$

in welchen

*) Siehe die Zeitschrift für Mathematik und Physik von Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl und Dr. M. Cantor. V. Band, 1860, Seite 339.

$$\begin{aligned} \gamma &= \beta - \alpha \\ \xi &= m + x \\ s &= A + B \end{aligned}$$

bedeuten. Die beiden Reihen (23) und (24) sind unbrauchbar, falls $s = 0$ ist, oder falls s gleich einer reellen ganzen negativen Zahl ist. Die Reihe (23) hat ferner die merkwürdige Eigenschaft, abubrechen, falls $A = 0$ ist, oder falls A eine reelle ganze und negative Zahl ist; eben so hat die Reihe (24) die merkwürdige Eigenschaft, abubrechen, falls $B = 0$ ist, oder falls B einer reellen ganzen negativen Zahl gleich ist. In allen übrigen Fällen aber sind beide Reihen (23) und (24) für jeden Werth von ξ convergent, wie immer auch sonst A und B beschaffen sein mögen; denn bildet man den Bruch $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, welcher den Quotienten zweier auf einander folgender Glieder der Reihe bezeichnet, so erhält man für die Reihe (23)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{A + n - 1}{s + n - 1} \cdot \frac{\gamma \xi}{n}$$

und für die Reihe (24)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = - \frac{B + n - 1}{s + n - 1} \cdot \frac{\gamma \xi}{n}$$

welche, wie man sieht, für unendlich wachsende Werthe von n sich fort und fort der Nulle nähern. Es haben also, wie man sieht, die beiden Reihen (23) und (24) grössere Gebiete der Giltigkeit als das Integrale, aus dem sie hervorgingen.

§. 8.

Es lässt sich nun auch direct nachweisen, dass der Gleichung $(m + x)y'' + [A + B - (\alpha + \beta)(m + x)]y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m + x)]y = 0$ (14) genügt wird, wenn man in selbe

$$y = e^{a\xi} \left[1 + \frac{A}{s} \cdot \gamma \xi + \frac{A(A+1)}{s(s+1)} \cdot \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{s(s+1)(s+2)} \cdot \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] \quad (23)$$

setzt. Um dies nachzuweisen, führen wir auch in die Gleichung (14) die Grössen ξ , s und γ mittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned} \gamma &= \beta - \alpha \\ \xi &= m + x \\ s &= A + B \end{aligned}$$

ein, wir setzen nämlich in die Gleichung (14)

$$\beta = \alpha + \gamma, \quad m + x = \xi, \quad B = s - A$$

und erhalten sodann statt der Gleichung (14) folgende andere Gleichung:

$$\xi \frac{d^2 y}{d\xi^2} + [s - (2\alpha + \gamma)\xi] \frac{dy}{d\xi} + [-A\gamma - s\alpha + \alpha(\alpha + \gamma)\xi] y = 0 \quad (25)$$

Führt man nun behufs weiterer Vereinfachung in (25) und in (23) für y eine neue Variable z ein mittelst der Substitution:

$$y = e^{a\xi} z$$

so erhält man, da

$$\frac{dy}{d\xi} = e^{\alpha\xi} (z' + \alpha z)$$

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} = e^{\alpha\xi} (z'' + 2\alpha z' + \alpha^2 z)$$

ist, statt der Gleichung (25) folgende Gleichung:

$$\xi z'' + (s - \gamma \xi) z' - A \gamma z = 0 \quad (26)$$

und dieser soll nun nachstehende Reihe genügen:

$$z = 1 + \frac{A}{s} \cdot \gamma \xi + \frac{A(A+1)}{s(s+1)} \cdot \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{s(s+1)(s+2)} \cdot \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \quad (27)$$

Aus der Gleichung (27) folgt:

$$z' = \frac{A\gamma}{s} \left[1 + \frac{A+1}{s+1} \cdot \gamma \xi + \frac{(A+1)(A+2)}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{(A+1)(A+2)(A+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \cdot \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right]$$

und

$$z'' = \frac{A(A+1)}{s(s+1)} \gamma^2 \left[1 + \frac{A+2}{s+2} \gamma \xi + \frac{(A+2)(A+3)}{(s+2)(s+3)} \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{(A+2)(A+3)(A+4)}{(s+2)(s+3)(s+4)} \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right]$$

und setzt man diese Werthe von z , z' und z'' in die Gleichung (26), so erhält man die Gleichung:

$$\xi z'' + (s - \gamma \xi) z' - A \gamma z = C_0 \gamma + C_1 \gamma^2 \xi + C_2 \gamma^3 \xi^2 + \dots + C_n \gamma^{n+1} \xi^n + \dots$$

in welcher

$$C_0 \quad C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_n$$

nachstehende Werthe haben:

$$C_0 = A - A$$

$$C_1 = \frac{A(A+1)}{s(s+1)} + \frac{A(A+1)}{s+1} - \frac{A}{s} - \frac{A^2}{s}$$

$$C_2 = \frac{A(A+1)(A+2)}{s(s+1)(s+2)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{A(A+1)(A+2)}{(s+1)(s+2)} - \frac{A(A+1)}{s(s+1)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{A^2(A+1)}{s(s+1)}$$

$$C_n = \frac{A(A+1)(A+2) \dots (A+n)}{s(s+1)(s+2) \dots (s+n)} \cdot \frac{1}{(n-1)!} + \frac{A(A+1)(A+2) \dots (A+n)}{(s+1)(s+2) \dots (s+n)} \cdot \frac{1}{n!} - \frac{A(A+1)(A+2) \dots (A+n-1)}{s(s+1)(s+2) \dots (s+n-1)} \cdot \frac{1}{(n-1)!} - A \cdot \frac{A(A+1)(A+2) \dots (A+n-1)}{s(s+1)(s+2) \dots (s+n-1)} \cdot \frac{1}{n!}$$

Man sieht auf den ersten Blick, dass $C_0 = 0$ ist, und eine leichte Rechnung zeigt, dass $C_1 = 0$ und $C_2 = 0$ ist; es ist nun auch nicht schwer, zu zeigen, dass auch $C_n = 0$ ist. Es gestattet nämlich C_n folgende Schreibweise:

$$C_n = \frac{A(A+1)(A+2) \dots (A+n-1)}{s(s+1)(s+2) \dots (s+n-1)} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{A+n}{s+n} + \frac{s(A+n)}{n(s+n)} - 1 - \frac{A}{n} \right]$$

und eine einfache Rechnung zeigt, dass der in den eckigen Klammern stehende Ausdruck wirklich gleich Null ist.

Demnach genügt der Gleichung

$$\xi z'' + (s - \gamma \xi) z' - A \gamma z = 0 \quad (26)$$

die Reihe

$$z = 1 + \frac{A}{s} \cdot \gamma \xi + \frac{A(A+1)}{s(s+1)} \cdot \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{s(s+1)(s+2)} \cdot \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \quad (27)$$

und somit genügt der Gleichung

$$(m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)]y=0 \quad (14)$$

die Reihe

$$y = e^{\alpha \xi} \left[1 + \frac{A}{s} \cdot \gamma \xi + \frac{A(A+1)}{s(s+1)} \cdot \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{s(s+1)(s+2)} \cdot \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] \quad (23)$$

unter ξ , γ und s die früher angegebenen Werthe verstanden, mit der einzigen Beschränkung, dass weder $s=0$, noch dass s gleich einer ganzen negativen Zahl ist.

§. 9.

Ich kehre nun wieder zu der Gleichung:

$$(m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]y = 0 \quad (14)$$

zurück, von welcher ich mittelst der Laplace'schen Methode nachstehendes particuläre Integrale gefunden habe:

$$y = \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du \quad (16)$$

welches richtig ist für positive Werthe von A und B , oder auch für solche imaginäre Werthe von A und B , deren reelle Bestandtheile positiv sind; und suche nun auf anderem Wege ein zweites particuläres Integrale der obigen Differentialgleichung zu erhalten. Zu dem Zwecke führe ich in die Gleichung (14) für y eine neue Variable z in die Rechnung ein, mittelst der Substitution

$$y = (m+x)^{\lambda} \cdot z$$

in welcher λ eine, einstweilen noch unbestimmte Constante bezeichnet. Aus obiger Gleichung folgt:

$$y' = (m+x)^{\lambda-1} [(m+x)z' + \lambda z]$$

$$y'' = (m+x)^{\lambda-2} [(m+x)^2 z'' + 2\lambda(m+x)z' + \lambda(\lambda-1)z]$$

und werden nun die hier aufgestellten Werthe von y , y' und y'' in die Gleichung (14) gesetzt, so erhält man eine neue Gleichung, welche durch $(m+x)^{\lambda-2}$ dividirt, nachstehende Gestalt hat:

$$(m+x)^2 z'' + (m+x)[A+B+2\lambda-(\alpha+\beta)(m+x)]z' + [\lambda(A+B+\lambda-1) - (A\beta+B\alpha+\lambda\alpha+\lambda\beta)(m+x) + \alpha\beta(m+x)^2]z = 0$$

Selbe gestattet eine Reduction, erstens, wenn $\lambda=0$, und zweitens wenn

$$\lambda = 1 - A - B$$

gesetzt wird, denn man kann dann diese Gleichung durch $m+x$ abkürzen, und erhält im ersten Falle, in welchem $\lambda=0$ ist, offenbar die Gleichung (14), von welcher ausgegangen wurde, im zweiten Falle aber erhält man die Gleichung:

$$(m+x)z'' + [2-A-B-(\alpha+\beta)(m+x)]z' + [-\alpha(1-A) - \beta(1-B) + \alpha\beta(m+x)]z = 0$$

welche genau die Gestalt der Gleichung (14) hat, und sich blos dadurch von ihr unterscheidet, dass statt der Buchstaben

$$y \quad A \quad B$$

respective folgende andere stehen:

$$z \quad 1-B \quad 1-A$$

Behandelt man daher die so eben gefundene Gleichung nach der Laplace'schen Methode, so gelangt man zu folgendem Integrale:

$$z = \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{-B} (u - \beta)^{-A} du$$

welches aber nur dann richtig ist, wenn $1 - A$ und $1 - B$ positive Zahlen sind, oder imaginäre Zahlen mit positiven reellen Bestandtheilen.

Das Integrale der Gleichung (14) ist demnach in dem Falle, in welchem $1 - A$ und $1 - B$ positive Zahlen sind, oder imaginäre Zahlen mit positiven reellen Bestandtheilen, folgendes:

$$y = (m + x)^{1-A-B} \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{-B} (u - \beta)^{-A} du \quad (28)$$

§. 10.

Das mit (28) bezeichnete Integrale gestattet eine leicht durchführbare Integration in dem Falle, in welchem A und B reell, ganz und negativ sind; ja selbst wenn eine der beiden Zahlen A oder B gleich Null, die andere aber reell, ganz und negativ ist, gelingt die Integration, und man findet dann genau so, wie wir im §. 5 gezeigt haben, das vollständige Integrale der vorgelegten Differentialgleichung. Setzt man nämlich

$$\psi(u) = (u - \alpha)^{-B} (u - \beta)^{-A}$$

so ist das vollständige Integrale der Gleichung (14) in dem genannten Falle:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \left[\frac{\psi(\alpha)}{m + x} - \frac{\psi'(\alpha)}{(m + x)^2} + \frac{\psi''(\alpha)}{(m + x)^3} - \dots \right] \cdot (m + x)^{1-A-B} + \\ + C_2 e^{\beta x} \left[\frac{\psi(\beta)}{m + x} - \frac{\psi'(\beta)}{(m + x)^2} + \frac{\psi''(\beta)}{(m + x)^3} - \dots \right] \cdot (m + x)^{1-A-B}$$

woselbst C_1 und C_2 willkürliche Constante bezeichnen.

Der Fall, dass gleichzeitig $A = 0$ und $B = 0$ ist, kann nicht eintreten, weil alsdann die Gleichung (14) in eine Gleichung mit constanten Coefficienten übergehen würde.

§. 11.

Das in (28) stehende Integrale lässt sich genau so in eine Reihe entwickeln, wie sich das Integrale (16) in eine Reihe entwickeln liess. Will man also für das Integrale (28) eine Reihe haben, so braucht man blos in den Reihen (23) und (24) statt A und B zu setzen:

$$1 - B \quad \text{und} \quad 1 - A$$

Multiplicirt man dann das so gefundene Resultat mit $(m + x)^{1-A-B}$, und gebraucht man sodann die früher eingeführten Bezeichnungen, so erhält man als Entwicklung des Integrales (28)

$$y = \xi^{1-s} e^{\alpha \xi} \left[1 + \frac{1-B}{2-s} \gamma \xi + \frac{(1-B)(2-B)}{(2-s)(3-s)} \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{(1-B)(2-B)(3-B)}{(2-s)(3-s)(4-s)} \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] \quad (29)$$

oder auch

$$y = \xi^{1-s} e^{\beta \xi} \left[1 - \frac{1-A}{2-s} \gamma \xi + \frac{(1-A)(2-A)}{(2-s)(3-s)} \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} - \frac{(1-A)(2-A)(3-A)}{(2-s)(3-s)(4-s)} \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] \quad (30)$$

und diese beiden Entwicklungen sind einander identisch gleich. Erstere führt, wie man auf den ersten Blick sieht, zu einem geschlossenen Ausdruck im Falle B eine reelle, ganze positive Zahl ist; letztere im Falle A eine reelle ganze positive Zahl ist. Beide Reihen sind unbrauchbar, im Falle s eine ganze positive Zahl und > 1 ist, in allen übrigen Fällen aber sind sie convergent.

§. 12.

Von der Gleichung

$$(m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]y = 0 \quad (14)$$

habe ich zwei Integrale angegeben, das eine ist:

$$y = \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du \quad (16)$$

und dies ist richtig, im Falle A und B positive Zahlen sind, oder solche imaginäre Zahlen, deren reelle Bestandtheile positiv sind; das andere ist:

$$y = (m+x)^{1-A-B} \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} du \quad (28)$$

und dies ist richtig, im Falle $1-A$ und $1-B$ oder ihre reellen Bestandtheile positiv sind.

„Sind daher A und B positive echte Brüche, oder sind A und B „imaginäre Zahlen, deren reelle Bestandtheile positive echte Brüche sind, so „kann man das vollständige Integrale der Gleichung (14) aufstellen, und dies „ist in geschlossener Form:

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du + \\ + C_2 (m+x)^{1-A-B} \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} du \quad (31)$$

woselbst C_1 und C_2 willkürliche Constante bezeichnen, oder in Reihenform:

$$y = C_1 e^{\alpha \xi} \left[1 + \frac{A}{s} \gamma \xi + \frac{A(A+1)}{s(s+1)} \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{s(s+1)(s+2)} \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] + \\ + C_2 \xi^{1-s} e^{\alpha \xi} \left[1 + \frac{1-B}{2-s} \gamma \xi + \frac{(1-B)(2-B)}{(2-s)(3-s)} \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{(1-B)(2-B)(3-B)}{(2-s)(3-s)(4-s)} \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] \quad (32)$$

oder anders geschrieben:

$$y = C_1 e^{\beta \xi} \left[1 - \frac{B}{s} \gamma \xi + \frac{B(B+1)}{s(s+1)} \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} - \frac{B(B+1)(B+2)}{s(s+1)(s+2)} \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] + \quad (33)$$

$$+ C_2 \xi^{1-s} e^{\beta \xi} \left[1 - \frac{1-A}{2-s} \gamma \xi + \frac{(1-A)(2-A)}{(2-s)(3-s)} \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} - \frac{(1-A)(2-A)(3-A)}{(2-s)(3-s)(4-s)} \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right]$$

wo der Kürze halber die wiederholt gebrauchten Bezeichnungen für s , γ und ξ eingeführt sind. C_1 und C_2 bezeichnen willkürliche Constante.

Dass die hier angegebenen particulären Integrale von einander verschieden, und somit die aufgestellten Integrale die vollständigen Integrale der vorgelegten Differentialgleichung sind, ergibt sich schon aus dem blossen Anblicke der Reihen, denn das eine particuläre Integrale ist, abgesehen von dem Factor $e^{\alpha \xi}$ respective $e^{\beta \xi}$, eine nach steigenden Potenzen von ξ geordnete Reihe, und das zweite particuläre Integrale ist, abgesehen von demselben Factor $e^{\alpha \xi}$ respective $e^{\beta \xi}$, eine mit ξ^{1-s} multiplicirte, auch nach steigenden Potenzen von ξ geordnete Reihe.

§. 13.

Der einzige specielle Fall, in welchem das im vorhergehenden § Gesagte eine Ausnahme erleidet, findet statt, wenn

$$A + B = 1$$

ist, und A und B positiv sind oder imaginär, und somit nachstehende Form haben:

$$A = \frac{1}{2} + q \sqrt{-1}$$

$$B = \frac{1}{2} - q \sqrt{-1}$$

In diesem Falle sind nämlich die in (31), (32) und (33) stehenden particulären Integrale nicht von einander verschieden, und man muss demnach das vollständige Integrale der vorgelegten Gleichung auf andere Art bestimmen.

Um dies zu thun, bezeichnen wir die beiden in (31) in Integralform stehenden particulären Integrale der Gleichung (14) mit y_1 und y_2 , setzen ferner der Kürze halber

$$e^{mu} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} = V$$

$$(m + x) (u - \alpha) (u - \beta) = W$$

$$A + B = s$$

so ist:

$$y_1 = \int_{\alpha}^{\beta} e^{ux} V du$$

$$y_2 = \int_{\alpha}^{\beta} e^{ux} V \cdot W^{1-s} du$$

Als zweites particuläres Integrale kann man auch $\frac{y_2 - y_1}{1-s}$ setzen, d. h. man kann setzen:

$$y_2 = \int_{\alpha}^{\beta} e^{ux} V \cdot \frac{W^{1-s} - 1}{1-s} du$$

dieses nimmt für $s=1$ die Form $\frac{0}{0}$ an, und ergibt als wahren Werth:

$$y_2 = \int_{\alpha}^{\beta} e^{ux} V \log W du$$

Man hat daher in dem Falle, in welchem

$$A + B = 1$$

ist, A und B aber positiv sind, oder imaginär und von der Form

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} + q\sqrt{-1} \\ B &= \frac{1}{2} - q\sqrt{-1} \end{aligned}$$

folgendes vollständige Integrale der Gleichung (14):

$$\begin{aligned} y &= C_1 \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du + \\ &+ C_2 \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log [(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)] du \quad (34) \end{aligned}$$

unter C_1 und C_2 willkürliche Constante verstanden *).

*) Poisson hat im Jahre 1823 im *Journal de l'école polytechnique*, tom. XII, cah. XIX, pag. 475 für die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left[h^2 + \frac{k(k-1)}{x^2} \right] y$$

im Falle k positiv und kleiner als 1 ist, folgendes Integrale gefunden:

$$y = Ax^k \int_0^{\pi} e^{-hx \cos w} \sin^{2k-1} w dw + Bx^{1-k} \int_0^{\pi} e^{-hx \cos w} \sin^{1-2k} w dw$$

und falls $k = \frac{1}{2}$ ist, das nachfolgende:

$$y = AVx \int_0^{\pi} e^{-hx \cos w} dw + BVx \int_0^{\pi} e^{-hx \cos w} \log (x \cos^2 w) dw$$

Setzt man hier durchgehends

$$y = x^k z$$

so erhält man die Gleichung:

$$x \frac{d^2 z}{dx^2} + 2k \frac{dz}{dx} - h^2 xz = 0$$

und ihr genügen

$$z = A \int_0^{\pi} e^{-hx \cos w} \sin^{2k-1} w dw + Bx^{1-2k} \int_0^{\pi} e^{-hx \cos w} \sin^{1-2k} w dw$$

oder für $k = \frac{1}{2}$

§. 14.

Ich will mich nun direct überzeugen, ob das zweite hier angegebene Integrale, nämlich ob

$$y = \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} \log [(m+x)(u - \alpha)(u - \beta)] du \quad (35)$$

wirklich der Gleichung

$$(m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]y = 0 \quad (14)$$

für den Fall

$$A + B = 1$$

genüge. Zu dem Behufe bilde ich y' und y'' und setze die gefundenen Werthe in die Gleichung (14).

Nun ist:

$$y' = \int_{\alpha}^{\beta} u e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} \log [m+x)(u - \alpha)(u - \beta)] du +$$

$$+ \frac{1}{m+x} \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du$$

$$y'' = \int_{\alpha}^{\beta} u^2 e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} \log [(m+x)(u - \alpha)(u - \beta)] du +$$

$$+ \frac{2}{m+x} \int_{\alpha}^{\beta} u e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du -$$

$$- \frac{1}{(m+x)^2} \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du$$

$$z = A \int_0^{\pi} e^{-hx \cos w} dw + B \int_0^{\pi} e^{-hx \cos w} \log (x \cos^2 w) dw$$

Diese beiden letzten Formeln sind Specialfälle der von mir aufgestellten Formeln (31) und (34), und gehen aus ihnen hervor, wenn man in selben $m=0$, $\alpha=-h$ und $\beta=+h$, $u=-h \cos w$ und entweder $A=B=k$ oder $A=B=\frac{1}{2}$ setzt.

Die letzte hier aufgestellte Formel für z veranlasste mich, zu forschen, ob und unter welchen Umständen den Gleichungen der Form (1) ein Integrale der Form

$$y = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V \log [(m+x) U_1] \cdot du$$

genüge. Ich habe das, was ich hierüber gefunden, im 54. Bande von Crelle's Journal veröffentlicht. Der Beweis, den ich in diesem §. gab, ist dem Beweise nachgebildet, den ich einer freundlichen brieflichen Mittheilung des Herrn Dr. Borchard, datirt vom 28. October 1858, verdanke.

und folglich hat man:

$$\begin{aligned}
 & (m+x) y'' + [1 - (\alpha + \beta)(m+x)] y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)] y = \\
 & = (m+x) \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^A (u-\beta)^B \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)] du + \\
 & + \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (u-A\beta-B\alpha) \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)] du + \\
 & + \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (2u-\alpha-\beta) du
 \end{aligned}$$

Der zweite Theil dieser Gleichung ist gleich

$$\left\{ e^{u(m+x)} (u-\alpha)^A (u-\beta)^B \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)] \right\}_{\alpha}^{\beta}$$

wie man sich durch wirkliches Differenziren überzeugen kann, und ist somit Null, weil der letzt aufgestellte Ausdruck sowohl für $u = \alpha$, als auch für $u = \beta$ verschwindet.

Es ist demnach in der That der in (35) stehende Ausdruck für den Fall $A + B = 1$, vorausgesetzt, dass A und B positive echte Brüche sind, das vollständige Integrale der Gleichung (14).

§. 15.

Betrachten wir nun das vollständige in Reihenform gegebene Integrale der Gleichung (14), welches wir im §. 12 fanden, nämlich:

$$\begin{aligned}
 y = & C_1 e^{\alpha\xi} \left[1 + \frac{A}{s} \gamma \xi + \frac{A(A+1)}{s(s+1)} \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{s(s+1)(s+2)} \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] + \\
 & + C_2 \xi^{1-s} e^{\alpha\xi} \left[1 + \frac{1-B}{2-s} \gamma \xi + \frac{(1-B)(2-B)}{(2-s)(3-s)} \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{(1-B)(2-B)(3-B)}{(2-s)(3-s)(4-s)} \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] \quad (32)
 \end{aligned}$$

und welches unzweifelhaft richtig ist für positive Werthe von A und B , welche kleiner als 1 sind, oder für solche imaginäre Werthe von A und B , deren reelle Bestandtheile diese Eigenschaft haben. Schaffen wir mittelst der Gleichung

$$A + B = s$$

den Buchstaben B aus der zweiten Reihe fort, so erscheint y in nachstehender Form:

$$\begin{aligned}
 y = & C_1 e^{\alpha\xi} \left[1 + \frac{A}{s} \gamma \xi + \frac{A(A+1)}{s(s+1)} \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{s(s+1)(s+2)} \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] + \\
 & + C_2 \xi^{1-s} e^{\alpha\xi} \left[1 + \frac{A+1-s}{2-s} \gamma \xi + \frac{(A+1-s)(A+2-s)}{(2-s)(3-s)} \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \right. \\
 & \left. + \frac{(A+1-s)(A+2-s)(A+3-s)}{(2-s)(3-s)(4-s)} \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right]
 \end{aligned}$$

und diese beiden Reihen fallen für $s = 1$, d. h. für

$$A + B = 1$$

in eine einzige Reihe zusammen. Es ist nämlich in diesem Falle

$$y = e^{a\xi} \left[1 + A\gamma\xi + \frac{A(A+1)}{1.2} \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{1.2.3} \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right]$$

Um nun auch in diesem Falle das vollständige Integrale in Reihenform zu erlangen, schlagen wir denselben Weg ein, den wir im §. 13 eingeschlagen haben, wir bezeichnen nämlich die beiden particulären Integrale der Gleichung (14) mit y_1 und y_2 , alsdann ist:

$$y_1 = e^{a\xi} \left[1 + \frac{A}{s} \gamma\xi + \frac{A(A+1)}{s(s+1)} \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{s(s+1)(s+2)} \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right]$$

$$y_2 = \xi^{1-s} e^{a\xi} \left[1 + \frac{A+1-s}{2-s} \gamma\xi + \frac{(A+1-s)(A+2-s)}{(2-s)(3-s)} \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \right. \\ \left. + \frac{(A+1-s)(A+2-s)(A+3-s)}{(2-s)(3-s)(4-s)} \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right]$$

Als zweites particuläres Integrale kann man auch statt y_2 den Bruch $\frac{y_2 - y_1}{1-s}$ setzen, welcher für $s=1$ in $\frac{0}{0}$ übergeht. Der wahre Werth dieses Bruches wird gefunden, wenn man sowohl den Zähler als auch den Nenner nach s differenzirt und dann $s=1$ setzt. Der Nenner gibt nach s differenzirt -1 ; man hat daher bloß $y_1 - y_2$ nach s zu differenziren, und in dem so erhaltenen Resultate $s=1$ zu setzen. Bevor wir dies thun, schreiben wir y_1 und y_2 in nachstehender Form:

$$y_1 = e^{a\xi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A(A+1)(A+2) \dots (A+n-2)}{s(s+1)(s+2) \dots (s+n-2)} \frac{\gamma^{n-1} \xi^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$y_2 = e^{a\xi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \xi^{1-s} \frac{(A+1-s)(A+2-s)(A+3-s) \dots (A+n-1-s)}{(2-s)(3-s)(4-s) \dots (n-s)} \frac{\gamma^{n-1} \xi^{n-1}}{(n-1)!}$$

Nun haben wir y_1 und y_2 nach s zu differenziren.

Setzen wir

$$P = \frac{A(A+1)(A+2) \dots (A+n-2)}{s(s+1)(s+2) \dots (s+n-2)}$$

so ist

$$\log P = \log A + \log(A+1) + \log(A+2) + \dots + \log(A+n-2) - \\ - \log s - \log(s+1) - \log(s+2) - \dots - \log(s+n-2)$$

Differenzirt man diese Gleichung nach s , so erhält man:

$$\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{ds} = -\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} - \dots - \frac{1}{s+n-2}$$

oder

$$\frac{dP}{ds} = -P \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \dots + \frac{1}{s+n-2} \right)$$

Für $s=1$ wird dies:

$$\left(\frac{dP}{ds} \right)_1 = -\frac{A(A+1)(A+2) \dots (A+n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right)$$

Setzen wir ferner

$$Q = \xi^{1-s} \cdot \frac{(A+1-s)(A+2-s)(A+3-s) \dots (A+n-1-s)}{(2-s)(3-s)(4-s) \dots (n-s)}$$

so ist:

$$\log Q = (1-s) \log \xi + \log(A+1-s) + \log(A+2-s) + \log(A+3-s) + \dots + \log(A+n-1-s) - \log(2-s) - \log(3-s) - \log(4-s) - \dots - \log(n-s)$$

Differenziren wir diese Gleichung nach s , so erhalten wir:

$$\frac{1}{Q} \cdot \frac{dQ}{ds} = -\log \xi - \frac{1}{A+1-s} - \frac{1}{A+2-s} - \frac{1}{A+3-s} - \dots - \frac{1}{A+n-1-s} + \frac{1}{2-s} + \frac{1}{3-s} + \frac{1}{4-s} + \dots + \frac{1}{n-s}$$

Multipliziert man diese Gleichung beiderseits mit Q , und setzt dann $s=1$, so erhält man:

$$\left(\frac{dQ}{ds}\right)_1 = \frac{A(A+1)(A+2) \dots (A+n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} \left[-\log \xi - \frac{1}{A} - \frac{1}{A+1} - \frac{1}{A+2} - \dots - \frac{1}{A+n-2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right]$$

Es ist demnach:

$$\left(\frac{y_2 - y_1}{1-s}\right)_{s=1} = e^{\alpha \xi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(A+1)(A+2) \dots (A+n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} \left[\log \xi + \frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} + \frac{1}{A+2} + \dots + \frac{1}{A+n-2} - 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) \right] \cdot \frac{\gamma^{n-1} \xi^{n-1}}{(n-1)!}$$

und folglich ist das vollständige, in Form einer unendlichen Reihe lautende Integrale der Gleichung (14) für den Fall, in welchem A und B positive echte Brüche sind, deren Summe gleich 1 ist, oder in welchem

$$A = \frac{1}{2} + q\sqrt{-1} \\ B = \frac{1}{2} - q\sqrt{-1}$$

ist, nachstehendes:

$$y = C_1 e^{\alpha \xi} \left[1 + A\gamma\xi + \frac{A(A+1)}{1 \cdot 2} \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] + \\ + C_2 e^{\alpha \xi} \left[\log \xi + \frac{A}{1} \left(\log \xi + \frac{1}{A} - \frac{2}{1} \right) \gamma\xi + \frac{A(A+1)}{1 \cdot 2} \left(\log \xi + \frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} \right) \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\log \xi + \frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} + \frac{1}{A+2} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} \right) \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right]$$

was sich auch so schreiben lässt:

$$y = C_1 e^{\alpha \xi} \left[1 + A\gamma\xi + \frac{A(A+1)}{1 \cdot 2} \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] + \\ + C_2 e^{\alpha \xi} \log \xi \left[1 + A\gamma\xi + \frac{A(A+1)}{1 \cdot 2} \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] + \\ + C_2 e^{\alpha \xi} \left[A \left(\frac{1}{A} - \frac{2}{1} \right) \gamma\xi + \frac{A(A+1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} \right) \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} + \frac{1}{A+2} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} \right) \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] \quad (37)$$

Dass die hier vorkommenden Reihen für jeden Werth von ξ convergiren, ist auf den ersten Blick ersichtlich.

§. 16.

Jetzt wollen wir noch den directen Nachweis liefern, dass das so eben in Form einer unendlichen Reihe aufgestellte Integrale der Gleichung (14) für den Fall $A + B = 1$ genüge, wenn unter A und B positive Zahlen verstanden werden, oder solche imaginäre Zahlen, deren reelle Bestandtheile positiv sind.

Führt man, wie in §. 8, in die Gleichung (14) die Grössen ξ , s und γ ein, und setzt man ferner

$$y = e^{\alpha \xi} z$$

so erhält man die Gleichung

$$\xi z'' + (s - \gamma \xi) z' - A \gamma z = 0 \quad (26)$$

welche für $s = 1$ übergeht in:

$$\xi z'' + (1 - \gamma \xi) z' - A \gamma z = 0 \quad (38)$$

Sind die particulären Integrale dieser Gleichung z_1 und z_2 , so hat man:

$$z_1 = 1 + A \gamma \xi + \frac{A(A+1)}{1.2} \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{1.2.3} \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \quad (39)$$

$$z_2 = z_1 \log \xi + A \left(\frac{1}{A} - \frac{2}{1} \right) \gamma \xi + \frac{A(A+1)}{1.2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} \right) \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} +$$

$$+ \frac{A(A+1)(A+2)}{1.2.3} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} + \frac{1}{A+2} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} \right) \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots$$

Der Werth von z_1 leistet, wie aus §. 8 zu ersehen, der Gleichung (38) Genüge; der Werth z_2 soll auch der Gleichung (38) genügen, und dies ist noch zu beweisen.

Construirt man zu dem Zwecke z_2' und z_2'' , so erhält man:

$$z_2' = \frac{z_1}{\xi} + z_1' \log \xi + A \left(\frac{1}{A} - \frac{2}{1} \right) \gamma + \frac{A(A+1)}{1.2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} \right) \gamma^2 \xi +$$

$$+ \frac{A(A+1)(A+2)}{1.2.3} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} + \frac{1}{A+2} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} \right) \frac{\gamma^3 \xi^2}{2!} + \dots$$

$$z_2'' = \frac{2z_1'}{\xi} - \frac{z_1}{\xi^2} + z_1'' \log \xi + \frac{A(A+1)}{1.2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} \right) \gamma^2 +$$

$$+ \frac{A(A+1)(A+2)}{1.2.3} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} + \frac{1}{A+2} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} \right) \gamma^3 \xi +$$

$$+ \frac{A(A+1)(A+2)(A+3)}{1.2.3.4} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} + \frac{1}{A+2} + \frac{1}{A+3} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \frac{2}{4} \right) \frac{\gamma^4 \xi^2}{2!} + \dots$$

demnach ist:

$$\xi z_2'' + (1 - \gamma \xi) z_2' - A \gamma z_2 = [\xi z_1'' + (1 - \gamma \xi) z_1' - A \gamma z_1] \log \xi + 2z_1' - \gamma z_1 +$$

$$+ C_0 \gamma + C_1 \gamma^2 \xi + C_2 \gamma^3 \xi^2 + C_3 \gamma^4 \xi^3 + C_4 \gamma^5 \xi^4 + \dots + C_n \gamma^{n+1} \xi^n + \dots \quad (40)$$

woselbst $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 \dots C_n$ nachstehende Werthe haben:

$$C_0 = A \left(\frac{1}{A} - \frac{2}{1} \right)$$

$$C_1 = 2 \frac{A(A+1)}{1.2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} \right) - A \left(\frac{1}{A} - \frac{2}{1} \right) - A^2 \left(\frac{1}{A} - \frac{2}{1} \right)$$

ist, u. s. w.; schliesslich muss noch bewiesen werden, dass der in (42) stehende Ausdruck Null wird, wenn man in demselben für C_n seinen in (41) stehenden Werth setzt. Es soll demnach:

$$\begin{aligned} & 2 \frac{A(A+1)(A+2) \dots (A+n)}{1.2.3 \dots (n+1)} \frac{1}{n!} - \frac{A(A+1)(A+2) \dots (A+n-1)}{1.2.3 \dots n} \frac{1}{n!} + \\ & + \frac{A(A+1)(A+2) \dots (A+n)}{1.2.3 \dots (n+1)} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} + \dots + \frac{1}{A+n} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \dots - \frac{2}{n+1} \right) \frac{1}{(n-1)!} + \\ & + \frac{A(A+1)(A+2) \dots (A+n)}{1.2.3 \dots (n+1)} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} + \dots + \frac{1}{A+n} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \dots - \frac{2}{n+1} \right) \frac{1}{n!} - \\ & - \frac{A(A+1)(A+2) \dots (A+n-1)}{1.2.3 \dots n} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} + \dots + \frac{1}{A+n-1} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \dots - \frac{2}{n} \right) \frac{1}{(n-1)!} - \\ & - A \frac{A(A+1)(A+2) \dots (A+n-1)}{1.2.3 \dots n} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} + \dots + \frac{1}{A+n-1} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \dots - \frac{2}{n} \right) \frac{1}{n!} = 0 \end{aligned}$$

sein. Die ganze Gleichung ist abkürzbar durch

$$\frac{A(A+1)(A+2) \dots (A+n-1)}{1.2.3 \dots n} \cdot \frac{1}{(n-1)!}$$

und nimmt man die Abkürzung vor, so erhält man:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \frac{A+n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \\ & + \frac{A+n}{n+1} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} + \dots + \frac{1}{A+n} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \dots - \frac{2}{n+1} \right) + \\ & + \frac{A+n}{n+1} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} + \dots + \frac{1}{A+n} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \dots - \frac{2}{n+1} \right) \frac{1}{n} - \\ & - \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} + \dots + \frac{1}{A+n-1} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \dots - \frac{2}{n} \right) - \\ & - A \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} + \dots + \frac{1}{A+n-1} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \dots - \frac{2}{n} \right) \frac{1}{n} = 0 \end{aligned}$$

Zieht man in dieser Gleichung die in der zweiten und dritten Zeile stehenden Glieder zusammen, so erhält man für selbe:

$$\frac{A+n}{n} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} + \dots + \frac{1}{A+n} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \dots - \frac{2}{n+1} \right)$$

zieht man ferner in derselben Gleichung die in der vierten und fünften Zeile stehenden Glieder zusammen, so erhält man:

$$- \frac{A+n}{n} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A+1} + \dots + \frac{1}{A+n-1} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \dots - \frac{2}{n} \right)$$

folglich ist die Summe der Glieder der zweiten, dritten, vierten und fünften Zeile der so eben besprochenen Gleichung

$$\frac{A+n}{n} \left(\frac{1}{A+n} - \frac{2}{n+1} \right)$$

Durch dies geht obige Gleichung über in

$$2 \cdot \frac{A+n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{A+n}{n} \left(\frac{1}{A+n} - \frac{2}{n+1} \right) = 0$$

und diese ist, wie leicht einzusehen, eine identische.

§. 17.

Betrachten wir nun wieder die Gleichung

$$(m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)]y=0 \quad (14)$$

und nehmen wir mit ihr nachstehende drei Operationen vor:

erstens setzen wir in selbe

$$y = e^{\alpha x} z$$

unter z eine neue Variable verstanden,

zweitens differenzieren wir die neu erhaltene Gleichung a mal nach x , woselbst a eine reelle ganze positive Zahl bezeichnet,

drittens setzen wir dann

$$z^{(a)} = e^{-\alpha x} y_1$$

unter y_1 wieder eine neue Variable verstanden,

und sehen wir sodann, welche Gestalt durch diese drei Operationen die vorgelegte Gleichung angenommen hat.

Setzen wir also in die Gleichung (14)

$$y = e^{\alpha x} z$$

so erhalten wir, da

$$y' = e^{\alpha x} (z' + \alpha z)$$

$$y'' = e^{\alpha x} (z'' + 2\alpha z' + \alpha^2 z)$$

ist, nachstehende Gleichung:

$$(m+x)z'' + [A+B+(\alpha-\beta)(m+x)]z' + A(\alpha-\beta)z = 0 \quad (43)$$

Wird diese Gleichung a mal nach x differenzirt, so erhält man, wenn man von der bekannten Formel:

$$\frac{d^\mu (P \cdot Q)}{dx^\mu} = P \cdot \frac{d^\mu Q}{dx^\mu} + \binom{\mu}{1} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot \frac{d^{\mu-1}Q}{dx^{\mu-1}} + \binom{\mu}{2} \frac{d^2P}{dx^2} \cdot \frac{d^{\mu-2}Q}{dx^{\mu-2}} + \dots \quad (44)$$

Gebrauch macht, welche für die wiederholte Differenzirung eines Productes zweier Factoren gilt, nachstehende Gleichung:

$$(m+x)z^{(a+2)} + [A+a+B+(\alpha-\beta)(m+x)]z^{(a+1)} + (A+a)(\alpha-\beta)z^{(a)} = 0$$

Setzt man endlich hierein:

$$z^{(a)} = e^{-\alpha x} y_1$$

somit

$$z^{(a+1)} = e^{-\alpha x} (y_1' - \alpha y_1)$$

$$z^{(a+2)} = e^{-\alpha x} (y_1'' - 2\alpha y_1' + \alpha^2 y_1)$$

so erhält man:

$$(m+x)y_1'' + [A+a+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y_1' + [-(A+a)\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]y_1 = 0 \quad (45)$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der vorgelegten Gleichung (14) dadurch, dass statt den Buchstaben

A und y

welche in der gegebenen Gleichung vorkommen, die Buchstaben

$A+a$ und y_1

zu stehen kommen.

Aus den zwei Gleichungen $y = e^{\alpha x} z$ und $z^{(a)} = e^{-\alpha x} y_1$ folgt:

$$y_1 = e^{\alpha x} \frac{d^a z}{dx^a}$$

$$z = e^{-\alpha x} y$$

und aus diesen beiden folgt

$$y_1 = e^{\alpha x} \frac{d^a}{dx^a} (e^{-\alpha x} y) \quad (46)$$

hieraus ergibt sich nachstehender merkwürdige Satz:

Die beiden Differentialgleichungen

$$(m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]y = 0 \quad (14)$$

$$(m+x)y_1'' + [A+a+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y_1' + [-(A+a)\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]y_1 = 0 \quad (45)$$

welche von einerlei Form sind und sich bloß dadurch von einander unterscheiden, dass statt den Buchstaben

$$y \quad \text{und} \quad A$$

welche in der Gleichung (14) vorkommen, die Buchstaben

$$y_1 \quad \text{und} \quad A+a$$

in der Gleichung (45) stehen, haben Integrale, die mittelst folgender Gleichung

$$y_1 = e^{\alpha x} \frac{d^a}{dx^a} (e^{-\alpha x} y) \quad (46)$$

zusammenhängen.

Nehmen wir nun mit der Gleichung (45) drei ganz ähnliche Operationen vor, wie wir mit der Gleichung (14) vorgenommen haben, indem wir erstens

$$y_1 = e^{\beta x} z_1$$

setzen, unter z_1 eine neue Variable verstanden, indem wir zweitens die auf diese Weise erhaltene Gleichung b mal nach x differenzieren (unter b eine reelle ganze positive Zahl verstanden) und indem wir drittens

$$z_1^{(b)} = e^{-\beta x} Y$$

setzen, so erhalten wir aus der Gleichung

$$(m+x)y_1'' + [A+a+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y_1' + [-(A+a)\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]y_1 = 0 \quad (45)$$

die nachstehende Gleichung:

$$(m+x)Y'' + [A+a+B+b-(\alpha+\beta)(m+x)]Y' + [-(A+a)\beta - (B+b)\alpha + \alpha\beta(m+x)]Y = 0 \quad (47)$$

und die beiden letzten Gleichungen, welche sich dadurch von einander unterscheiden, dass statt den Grössen

$$y_1 \quad \text{und} \quad B$$

welche in der Gleichung (45) vorkommen, die Grössen

$$Y \quad \text{und} \quad B+b$$

in der Gleichung (47) stehen, haben Integrale, die in folgendem Zusammenhange stehen:

$$Y = e^{\beta x} \frac{d^b}{dx^b} (e^{-\beta x} y_1) \quad (48)$$

Combinirt man nun die beiden so eben in den Gleichungen (46) und (48) gewonnenen Resultate, so gelangt man zu folgendem merkwürdigen Satze:

„Die zwei Differentialgleichungen:

$$(m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)]y=0 \quad (14)$$

$$(m+x)Y'' + [A+a+B+b-(\alpha+\beta)(m+x)]Y' + [-(A+a)\beta-(B+b)\alpha+\alpha\beta(m+x)]Y=0 \quad (47)$$

„welche von einerlei Form sind, und welche sich bloß dadurch von einander unterscheiden, dass statt der Grössen

$$\begin{array}{ccc} y & A & B \\ Y & A+a & B+b \end{array}$$

„welche in der Gleichung (14) vorkommen, die Grössen

„in (47) auftreten, haben Integrale, die in folgendem Zusammenhange stehen:

$$Y = e^{\beta x} \frac{d^b}{dx^b} \left[e^{(\alpha-\beta)x} \frac{d^a}{dx^a} (e^{-\alpha x} y) \right] \quad (48)$$

„und hier bezeichnen a und b reelle, ganze positive Zahlen.“

§. 18.

Das vollständige Integrale der Gleichung (14) wurde von uns in dem speciellen Falle, in welchem A und B positive echte Brüche sind, und auch in dem Falle, in welchem A und B imaginär sind, die reellen Bestandtheile derselben aber positive echte Brüche sind, gefunden, und zwar in zweifacher Form, nämlich einmal in Form von bestimmten Integralen, ein andermal in Form unendlicher convergirender Reihen.

Das vollständige Integrale der Gleichung (47) lässt sich daher ebenfalls angeben, und zwar gleichfalls in zweifacher Form, nämlich in Form von bestimmten Integralen oder auch in Form unendlicher convergirender Reihen, es ist nämlich

$$Y = e^{\beta x} \frac{d^b}{dx^b} \left[e^{(\alpha-\beta)x} \frac{d^a}{dx^a} (e^{-\alpha x} y) \right] \quad (48)$$

Durch dies sind wir also im Stande, die Gleichung (14) zu integrieren nicht nur in dem Falle, in welchem A und B positive echte Brüche sind, sondern auch in dem Falle, in welchem A und B positive unechte Brüche sind. (Für den Fall, dass A und B imaginär sein sollten, gelten die gewonnenen Sätze, wenn die reellen Bestandtheile von A und B die genannte Eigenschaft haben.)

§. 19.

Ich wende mich nun zu jenem Falle, in welchem in der Gleichung (14) beide Argumente A und B gebrochen und negativ sind, oder auch, in welchem A und B imaginär sind, die reellen Bestandtheile derselben aber gebrochen und negativ sind.

In diesem Falle nützt die Substitution:

$$y = (m+x)^{1-A-B} z$$

denn macht man dieselbe in die Gleichung:

$$(m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)]y=0 \quad (14)$$

so erhält man (man sehe §. 9) die Gleichung:

$$(m+x)z'' + [2 - A - B - (\alpha + \beta)(m+x)]z' + \\ + [-\alpha(1-A) - \beta(1-B) + \alpha\beta(m+x)]z = 0$$

welche, wie schon in §. 9 bemerkt wurde, genau die Gestalt der Gleichung (14) hat, und sich bloß dadurch von derselben unterscheidet, dass statt

$$y \quad A \quad \text{und} \quad B$$

respective die Grössen

$$z \quad 1-B \quad , \quad 1-A$$

vorkommen, und nun sind $1-A$ und $1-B$ immer dann positiv, wenn A und B negative Zahlen bedeuten.

Man kann demnach die durch obige Substitution erhaltene Gleichung nach den bisher gegebenen Methoden sowohl mittelst bestimmter Integrale als auch mittelst unendlichen und convergenten Reihen integriren; und hat man z gefunden, so ergibt sich y aus der Gleichung

$$y = (m+x)^{1-A-B} z$$

§. 20.

Nun ist auch leicht in dem Falle das Integrale der Gleichung (14) zu bestimmen, wenn die beiden Zahlen A und B gebrochen sind und von entgegengesetztem Zeichen. Es ist klar, dass in diesem Falle A und B reell sein müssen, weil imaginäre Zahlen, die conjugirt auftreten, nicht entgegengesetzt bezeichnet sein können.

Sei etwa die vorgelegte Gleichung

$$(m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]y = 0 \quad (14)$$

in welcher die beiden Argumente A und B Brüche sind, die verschiedene Zeichen haben; es sei nämlich:

$$A = -a + A_1$$

$$B = +b + B_1$$

unter a und b reelle, ganze positive Zahlen, und unter A_1 und B_1 reelle positive Zahlen verstanden, die aber kleiner als 1 sind.

Wenn man nun folgende Gleichung aufstellt:

$$(m+x)z'' + [A+B_1-1-(\alpha+\beta)(m+x)]z' + [-A\beta - (B_1-1)\alpha + \alpha\beta(m+x)]z = 0 \quad (49)$$

welche sich von der Gleichung (14) dadurch unterscheidet, dass an der Stelle der Variablen y die Variable z , ferner an Stelle der Constanten B die Constante $B_1 - 1$ (welche nach der Voraussetzung ein reeller negativer echter Bruch ist und um die ganze Zahl $b+1$ kleiner ist als B) steht, so lässt sich diese Gleichung (49), da beide Argumente derselben, nämlich A und $B_1 - 1$ negativ sind, nach der im vorhergehenden §. gezeigten Weise integriren, und hat man z gefunden, so ist auch y leicht zu finden; denn setzt man in (49)

$$z = e^{\beta x} z_1$$

differenzirt sodann die neue Gleichung $b+1$ mal, und setzt man schliesslich

$$z_1^{(b+1)} = e^{-\beta x} y$$

so gelangt man (siehe §. 17) zur Gleichung (14), folglich ist

$$y = e^{\beta x} \frac{d^{b+1}}{dx^{b+1}} (e^{-\beta x} z)$$

§. 21.

Die Gleichung

$$(m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]y = 0 \quad (14)$$

lässt sich in dem eben besprochenen Falle, in welchem die beiden Argumente A und B verschieden bezeichnete und gebrochene Zahlen sind, in welchem nämlich

$$A = -a + A_1$$

$$B = +b + B_1$$

ist, noch auf eine andere Weise integrieren *). Setzt man nämlich in (14)

$$y = e^{\alpha x} z$$

so erhält man

$$(m+x)z'' + [A+B+(\alpha-\beta)(m+x)]z' + A(\alpha-\beta)z = 0 \quad (43)$$

Differenzirt man nun diese Gleichung mehrere Male, so erhält man successive:

$$(m+x)z''' + [1+A+B+(\alpha-\beta)(m+x)]z'' + (1+A)(\alpha-\beta)z' = 0$$

$$(m+x)z'''' + [2+A+B+(\alpha-\beta)(m+x)]z''' + (2+A)(\alpha-\beta)z'' = 0$$

$$(m+x)z^{(5)} + [3+A+B+(\alpha-\beta)(m+x)]z'''' + (3+A)(\alpha-\beta)z''' = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(m+x)z^{(a)} + [a-2+A+B+(\alpha-\beta)(m+x)]z^{(a-1)} + (a-2+A)(\alpha-\beta)z^{(a-2)} = 0$$

$$(m+x)z^{(a+1)} + [a-1+A+B+(\alpha-\beta)(m+x)]z^{(a)} + (a-1+A)(\alpha-\beta)z^{(a-1)} = 0$$

$$(m+x)z^{(a+2)} + [a+A+B+(\alpha-\beta)(m+x)]z^{(a+1)} + (a+A)(\alpha-\beta)z^{(a)} = 0$$

Die letzte dieser Gleichungen ist, da ihre beiden Argumente, nämlich $a+A$ und B , reelle positive Brüche sind, nach der im §. 18 gegebenen Methode integrirbar; man kann daher aus ihr $z^{(a)}$ finden. Hat man dies gefunden, so gelangt man durch a maliges Integrieren zum Werthe von z . Aber das a malige Integrieren ist nicht leicht. Besser ist es daher, nachdem aus der letzten Gleichung das $z^{(a)}$ gefunden wurde, aus der vorletzten Gleichung das $z^{(a-1)}$ zu suchen. Die vorvorletzte Gleichung liefert dann das $z^{(a-2)}$ u. s. f.; die dritte Gleichung liefert z''' , aus der zweiten Gleichung ergibt sich dann das z'' , aus der ersten Gleichung das z' und schliesslich findet man dann aus der Gleichung (43) das z . Hat man dies, so lässt sich das y aus der Gleichung

$$y = e^{\alpha x} z$$

aufstellen.

*) Den Grundgedanken zu der in diesem §. gezeigten Methode verdanke ich einer freundlichen brieflichen Mittheilung von Dr. Oskar Schlömilch vom 14. März 1860.

§. 22.

Ich werde nun eine andere Integrationsmethode für die Gleichungen der Form (14) zeigen, welche namentlich in dem Falle, in welchem A und B reelle, ganze positive Zahlen sind, oder in dem Falle, in welchem bloß eine dieser beiden Zahlen reell, ganz und positiv ist, zweckmässig anwendbar ist. Setzt man nämlich in die Gleichung

$$(m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]y = 0 \quad (14)$$

die schon mehrmals gebrauchte Substitution

$$y = e^{\alpha x} z$$

so erhält man:

$$(m+x)z'' + [A+B+(\alpha-\beta)(m+x)]z' + A(\alpha-\beta)z = 0 \quad (43)$$

und differenziert man diese Gleichung nach dem Vorgange Liouville's*) μ mal, unter μ eine einstweilen noch unbestimmte Zahl verstanden, so erhält man:

$$(m+x)z^{(\mu+2)} + [\mu+A+B+(\alpha-\beta)(m+x)]z^{(\mu+1)} + (\mu+A)(\alpha-\beta)z^{(\mu)} = 0$$

und diese Gleichung vereinfacht sich, wenn man

$$\mu = -A$$

setzt, man erhält nämlich hiedurch die Gleichung:

$$(m+x)z^{(-A+2)} + [B+(\alpha-\beta)(m+x)]z^{(-A+1)} = 0 \quad (50)$$

Durch Trennung der Variablen kömmt man zu der Gleichung:

$$\frac{d \cdot z^{(-A+1)}}{z^{(-A+1)}} = -\frac{B dx}{m+x} + (\beta-\alpha) dx$$

deren Integrale ist:

$$\log z^{(-A+1)} = (\beta-\alpha)x - B \log(m+x)$$

woraus folgt:

$$z^{(-A+1)} = \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B}$$

man hat daher, wenn man diese Gleichung beiderseits $A-1$ mal differenziert:

$$z = \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B} \right]$$

und folglich ist:

$$y = e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B} \right] \quad (51)$$

*) Liouville hat im Jahre 1832 im XIII. Bande, Cahier 21 des Journals de l'école polytechnique ein Memoire über die Integration der Differentialgleichung

$$(mx^2 + nx + p) \frac{d^2 y}{dx^2} + (qx + r) \frac{dy}{dx} + sy = 0$$

veröffentlicht. In diesem äusserst merkwürdigen Memoire wird zum ersten Male bei Gelegenheit der Integration linearer Differentialgleichungen Gebrauch gemacht von Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl.

Vertauscht man in dieser Formel A mit B und gleichzeitig α mit β , so erhält man:

$$y = e^{\beta x} \frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}} \left[\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{(m+x)^A} \right] \quad (52)$$

Die Formel (51) gibt ein Integral der Gleichung (14) in dem Falle, in welchem A eine reelle, ganze positive Zahl ist; die Formel (52) gibt ein Integral derselben Gleichung in dem Falle, in welchem B eine reelle, ganze positive Zahl ist. Sind die beiden Zahlen A und B reell, ganz und positiv, so ist

$$y = C_1 e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B} \right] + C_2 e^{\beta x} \frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}} \left[\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{(m+x)^A} \right] \quad (53)$$

das vollständige Integrale der Gleichung (14); C_1 und C_2 bedeuten willkürliche Constante *).

§. 23.

Der Weg, den wir im vorhergehenden §. eingeschlagen haben, um das Integrale der Gleichung (14) zu erlangen, ist nicht ganz tadellos. Verfolgen wir daher denselben nochmals Schritt für Schritt.

Wir setzten in der Gleichung (14)

$$y = e^{\alpha x} z$$

und erhielten:

$$(m+x)z'' + [A+B+(\alpha-\beta)(m+x)]z' + A(\alpha-\beta)z = 0 \quad (43)$$

Diese Gleichung differenzirten wir μ mal, und da nachher

$$\mu = -A$$

gesetzt wurde, und A eine reelle, ganze positive Zahl bezeichnet, so müsste die durch μ maliges Differenziren, respective A maliges Integriren resultirende Gleichung folgendermassen lauten:

$$(m+x)z^{(-A+2)} + [B+(\alpha-\beta)(m+x)]z^{(-A+1)} = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_{A-1} x^{A-1}$$

woselbst $C_0, C_1, C_2 \dots C_{A-1}$ willkürliche Constante sind, und diese Gleichung ist von der Gleichung (50) verschieden.

Um daher die Richtigkeit des Integrales (51) nachzuweisen, schlage ich folgenden Weg ein:

*) Serret veröffentlichte im Jahre 1843 in den *Comptes rendus* der Pariser Akademie eine Abhandlung unter dem Titel: „*Mémoire sur l'intégration d'une équation différentielle à indices quelconques*“ und gibt darin für die Gleichung

$$x y'' + 2 n y' - \lambda^2 x y = 0$$

das folgende Integrale:

$$y = C_1 e^{\lambda x} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-2\lambda x} x^{-n}) + C_2 e^{-\lambda x} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{2\lambda x} x^{-n})$$

Ich bemerke, dass diese von Serret integrierte Gleichung ein sehr specieller Fall der Gleichung (14) ist, und daraus hervorgeht, wenn man in (14)

$$m = 0 \quad A = B = n \quad \alpha = \lambda \quad \beta = -\lambda$$

setzt.

Ich integrirte die Gleichung (43) zuerst für den speciellen Fall $A = 1$. Bezeichnet man in diesem Falle die abhängig Variable mit z_1 , so hat man:

$$(m+x) z_1'' + [1+B+(\alpha-\beta)(m+x)] z_1' + (\alpha-\beta) z_1 = 0 \quad (54)$$

Integrirt man diese Gleichung einmal, so erhält man:

$$(m+x) z_1' + [B+(\alpha-\beta)(m+x)] z_1 = C$$

woselbst C eine willkürliche Constante bezeichnet. Diese Gleichung ist von der ersten Ordnung; ihr Integrale ist:

$$z_1 = C \cdot \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B} \int (m+x)^{B-1} e^{(\alpha-\beta)x} dx \quad (55)$$

und dieses z_1 ist somit das vollständige Integrale der Gleichung (54).

Differenzirt man nun die Gleichung (54) $A-1$ mal, so erhält man:

$$(m+x) z_1^{(A+1)} + [A+B+(\alpha-\beta)(m+x)] z_1^{(A)} + A(\alpha-\beta) z_1^{(A-1)} = 0 \quad (56)$$

und es ist klar, dass auch dieser Gleichung der in (55) stehende Werth von z_1 Genüge leistet. Das vollständige Integrale der Gleichung (56) lautet aber folgendermassen:

$$z_1 = C \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B} \int (m+x)^{B-1} e^{(\alpha-\beta)x} dx + C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_{A-1} x^{A-2}$$

Führt man nun für $z_1^{(A-1)}$ eine neue Variable z ein, mittelst der Substitution

$$z_1^{(A-1)} = z$$

so geht die Gleichung (56) über in:

$$(m+x) z'' + [A+B+(\alpha-\beta)(m+x)] z' + A(\alpha-\beta) z = 0 \quad (43)$$

und ihr genügt:

$$z = \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[C \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B} \int (m+x)^{B-1} e^{(\alpha-\beta)x} dx + C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_{A-1} x^{A-2} \right]$$

oder gehörig reducirt:

$$z = C \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B} \int (m+x)^{B-1} e^{(\alpha-\beta)x} dx \right]$$

es genügt folglich der Gleichung (14) folgender Werth:

$$y = C e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B} \int (m+x)^{B-1} e^{(\alpha-\beta)x} dx \right]$$

dies lässt sich auch so schreiben:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B} \right] + C_2 e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B} \int (m+x)^{B-1} e^{(\alpha-\beta)x} dx \right] \quad (57)$$

und ist das vollständige Integrale der Gleichung (14), C_1 und C_2 bedeuten willkürliche Constante.

Auf gleiche Weise findet man, wenn B reell, ganz und positiv ist, für y folgendes vollständige Integrale:

$$y = C_1 e^{\beta x} \frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}} \left[\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{(m+x)^A} \right] + C_2 e^{\beta x} \frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}} \left[\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{(m+x)^B} \int (m+x)^{A-1} e^{(\beta-\alpha)x} dx \right] \quad (58)$$

Ist daher A eine reelle, ganze positive und B eine beliebige Zahl, so ist der in (57) stehende Ausdruck das vollständige Integrale der Gleichung (14); ist B eine reelle, ganze positive und A eine beliebige Zahl, so ist das vollständige Integrale in (58) angegeben; sind A und B reelle, ganze positive Zahlen, so ist das vollständige Integrale der Differentialgleichung (14) der in (53) gegebene Ausdruck, und dieser ist wesentlich einfacher als das in (20) für denselben Fall reeller, ganzer und positiver Werthe von A und B aufgestellte Integrale.

§. 24.

Man kann leicht das für reelle, ganze und positive Werthe von A gefundene Integrale der Gleichung (14), nämlich

$$y = e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B} \right] \quad (51)$$

in entwickelter Gestalt darstellen, man braucht nur in der Formel:

$$(PQ)^{(\mu)} = PQ^{(\mu)} + \binom{\mu}{1} P' Q^{(\mu-1)} + \binom{\mu}{2} P'' Q^{(\mu-2)} + \dots \quad (44)$$

zu setzen:

$$\begin{array}{llll} \text{für } P & \text{die Function} & (m+x)^{-B} \\ & Q & e^{(\beta-\alpha)x} \\ & \mu & \text{Zahl} & A-1 \end{array}$$

und erhält dann für y folgende Reihe:

$$y = \frac{e^{\beta x}}{(m+x)^B} \left[1 - \binom{A-1}{1} \binom{B}{1} \frac{1}{(\beta-\alpha)(m+x)} + \binom{A-1}{2} \binom{B+1}{2} \frac{2!}{(\beta-\alpha)^2(m+x)^2} - \right. \\ \left. - \binom{A-1}{3} \binom{B+2}{3} \frac{3!}{(\beta-\alpha)^3(m+x)^3} + \dots \right] \quad (59)$$

eben so führt der für reelle, ganze und positive Werthe von B gültige Ausdruck:

$$y = e^{\beta x} \frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}} \left[\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{(m+x)^A} \right] \quad (52)$$

gehörig entwickelt zu folgender Reihe:

$$y = \frac{e^{\alpha x}}{(m+x)^A} \left[1 - \binom{B-1}{1} \binom{A}{1} \frac{1}{(\alpha-\beta)(m+x)} + \binom{B-1}{2} \binom{A+1}{2} \frac{2!}{(\alpha-\beta)^2(m+x)^2} - \right. \\ \left. - \binom{B-1}{3} \binom{A+2}{3} \frac{3!}{(\alpha-\beta)^3(m+x)^3} + \dots \right] \quad (60)$$

Die Reihe (59) bricht, wie man sieht, ab, im Falle A eine ganze positive, oder B eine ganze negative Zahl ist, und die Reihe (60) bricht ab, im Falle B eine ganze positive oder A eine ganze negative Zahl ist.

§. 25.

Wenn man in die Gleichung (14) zuerst die Substitution

$$y = (m+x)^{1-A-B} z$$

macht, und dann den in §. 22 betretenen Weg einschlägt, so erhält man:

$$y = (m + x)^{1-A-B} \left\{ C_1 e^{\alpha x} \frac{d^{-B}}{dx^{-B}} \left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^{1-A}} \right] + C_2 e^{\beta x} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}} \left[\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{(m+x)^{1-B}} \right] \right\}$$

Dieses Integrale ist tadellos in dem Falle, in welchem A und B reell, ganz und negativ sind; ist bloß A allein reell, ganz und negativ, oder ist $A = 0$, so ist bloß folgendes particuläre Integrale

$$y = (m + x)^{1-A-B} e^{\beta x} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}} \left[\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{(m+x)^{1-B}} \right] \quad (61)$$

tadellos, und das andere particuläre Integrale ergibt sich mittelst der bekannten Methode der Variation der willkürlichen Constanten. Ist bloß B allein reell, ganz und negativ, oder ist $B = 0$, so ist ein particuläres Integrale der Gleichung (14)

$$y = (m + x)^{1-A-B} e^{\alpha x} \frac{d^{-B}}{dx^{-B}} \left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^{1-A}} \right] \quad (62)$$

Man kann leicht die beiden Integrale (61) und (62) in entwickelter Gestalt darstellen. Benützt man nämlich wieder die Formel (44), so erhält man genau die in (59) und (60) aufgestellten Reihen.

§. 26.

Man kann das vollständige Integrale der Differentialgleichung (14) in dem Falle, in welchem A allein reell, ganz und negativ ist, auch auf folgende Weise aufstellen.

Setzt man in (14)

$$y = (m + x)^{1-A-B} z$$

so erhält man:

$$(m + x) z'' + [2 - A - B - (\alpha + \beta)(m + x)] z' + [-\alpha(1 - A) - \beta(1 - B) + \alpha\beta(m + x)] z = 0$$

Diese Gleichung, in welcher die beiden Argumente $1 - B$ und $1 - A$ vorkommen, hat ein Argument, nämlich $1 - A$, welches reell, ganz und positiv ist. Das Integrale dieser Gleichung ist somit vermöge der Formel (58)

$$z = C_1 e^{\beta x} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}} \left[\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{(m+x)^{1-B}} \right] + C_2 e^{\beta x} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}} \left[\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{(m+x)^{1-B}} \int (m+x)^{-B} e^{(\beta-\alpha)x} dx \right]$$

und folglich ist:

$$y = (m + x)^{1-A-B} e^{\beta x} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}} \left[C_1 \frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{(m+x)^{1-B}} + C_2 \cdot \frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{(m+x)^{1-B}} \int (m+x)^{-B} e^{(\beta-\alpha)x} dx \right] \quad (63)$$

das vollständige Integrale der vorgelegten Differentialgleichung (14) für den Fall, in welchem $A = 0$ ist, oder in welchem A eine reelle, ganze und negative Zahl bezeichnet.

Auf gleiche Weise findet man, falls $B = 0$ oder falls B gleich einer reellen, ganzen negativen Zahl ist,

$$y = (m+x)^{1-A-B} e^{\alpha x} \frac{d^{-B}}{dx^{-B}} \left[C_1 \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^{1-A}} + C_2 \cdot \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^{1-A}} \int (m+x)^{-A} e^{(\alpha-\beta)x} dx \right]$$

als vollständiges Integrale der Gleichung (14). C_1 und C_2 bedeuten stets willkürliche Constante.

§. 27.

Die Differentialgleichungen der Form (14) lassen sich in dem Falle, in welchem eine der beiden Zahlen A oder B , oder in welchem beide Zahlen A und B zugleich reelle, ganze und negative Zahlen sind, noch nach einer andern, von Prof. Josef Petzval herrührenden Methode integrieren, die ich nun darlegen will.

Sei

$$(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0 \quad (1)$$

die gegebene Differentialgleichung.

Herr Petzval setzt das Integrale der Differentialgleichung (1) in folgender Form voraus:

$$y = \left\{ \frac{d^h}{du^h} [e^{ux} W] \right\}_\alpha \quad (64)$$

in welcher W eine, einstweilen noch unbestimmte Function von u ist, h und α constante Zahlen bedeuten. Wird nämlich die Function

$$e^{ux} W$$

mehrmals nach einander — nämlich h mal — nach u differenzirt, und setzt man dann nach gemachter Differentiation statt u die Zahl α , so hat man y als Function von x , und dieses y soll der Gleichung (1) Genüge leisten.

Um sich zu überzeugen, ob wirklich der in (64) stehende Ausdruck der Gleichung (1) genügt, hat man y' und y'' zu construiren. Nun ist:

$$y' = \left\{ \frac{d^h}{du^h} [u e^{ux} W] \right\}_\alpha$$

$$y'' = \left\{ \frac{d^h}{du^h} [u^2 e^{ux} W] \right\}_\alpha$$

Werden diese Werthe in (1) substituirt, so erhält man:

$$\left\{ \frac{d^h}{du^h} [e^{ux} W ((a_2 + b_2 x) u^2 + (a_1 + b_1 x) u + (a_0 + b_0 x))] \right\}_\alpha = 0 \quad (65)$$

Setzt man nun wie in §. 1 der Kürze halber:

$$a_2 u^2 + a_1 u + a_0 = U_0$$

$$b_2 u^2 + b_1 u + b_0 = U_1$$

so gestattet die Gleichung (65) folgende Schreibweise:

$$\left\{ \frac{d^h}{du^h} [e^{ux} W (U_0 + U_1 x)] \right\}_\alpha = 0$$

und diese Gleichung soll nun identisch stattfinden.

Damit aber die Gleichung

$$\left\{ \frac{d^h}{du^h} [e^{ux} W (U_0 + U_1 x)] \right\} = 0 \quad (66)$$

für $u = \alpha$ identisch statffinde, ist es, wie ich bemerkt habe*), erforderlich, dass die Gleichung (66) auf die Form

$$\left\{ \frac{d^h}{du^h} \left[(u - \alpha) \frac{d\varphi}{du} - h\varphi \right] \right\} = 0$$

gebracht werden könne, denn führt man die hier vorkommende h malige Differentiation wirklich aus, so erhält man:

$$(u - \alpha) \frac{d^{h+1}\varphi}{du^{h+1}} + h \frac{d^h\varphi}{du^h} - h \frac{d^h\varphi}{du^h} = 0$$

was für $u = \alpha$ in der That identisch wird, wenn nur

$$\frac{d^{h+1}\varphi}{du^{h+1}}$$

für $u = \alpha$ nicht unendlich gross ist.

Wir setzen daher:

$$e^{ux} W (U_0 + U_1 x) = (u - \alpha) \frac{d\varphi}{du} - h\varphi$$

Damit diese Gleichung statffinden könne, muss offenbar φ die Form haben:

$$\varphi = e^{ux} z$$

woselbst z eine Function von u ist, und setzt man φ in dieser Form voraus, so hat man:

$$e^{ux} W (U_0 + U_1 x) = e^{ux} \left[(u - \alpha) \frac{dz}{du} - hz + (u - \alpha) xz \right]$$

Diese Gleichung lässt sich durch e^{ux} dividiren, und zerfällt in folgende zwei Gleichungen:

$$U_0 W = (u - \alpha) \frac{dz}{du} - hz$$

$$U_1 W = (u - \alpha) z$$

und diese zwei Gleichungen reichen hin zur Bestimmung von z und W .

Dividirt man die beiden letzten Gleichungen durch einander, so fällt W weg, und man erhält, wenn man gleich von Brüchen befreiet

$$U_0 (u - \alpha) z = U_1 (u - \alpha) \frac{dz}{du} - h U_1 z$$

woraus sich ergibt

$$z = (u - \alpha)^h e^{\int \frac{U_0 du}{U_1}}$$

demnach ist:

$$W = \frac{(u - \alpha)^{h+1}}{U_1} \cdot e^{\int \frac{U_0 du}{U_1}}$$

*) Petzval's Nachweis, dass der Ausdruck (64) der Differentialgleichung (1) genügt, ist äusserst complicirt und verwickelt. Man sehe „Petzval's Integration der linearen Differentialgleichungen I. Band, S. 65; ferner II. Band, S. 369.

und

$$y = \left\{ \frac{d^h}{du^h} \left[\frac{(u - \alpha)^{h+1}}{U_1} \cdot e^{ux + \int \frac{U_0 du}{U_1}} \right] \right\}_\alpha \quad (67)$$

§. 28.

Das eben gefundene y ist, wenn h Null, oder eine reelle ganze positive Zahl bezeichnet — und unter dieser einzigen Voraussetzung ist die ganze bisher geführte Analyse tadellos — und α ganz willkürlich ist, im Allgemeinen gleich Null; denn differenzirt man einen Ausdruck der Form

$$(u - \alpha)^{h+1} \psi(u)$$

h mal, so erhält man einen Ausdruck, der für $u = \alpha$ verschwindet, so lange nämlich weder $\psi(\alpha)$ noch einer der folgenden Differentialquotienten

$$\psi'(\alpha), \quad \psi''(\alpha), \quad \psi'''(\alpha) \dots \psi^{(h)}(\alpha)$$

unendlich gross ist.

Aber anders ist es in dem speciellen Falle, in welchem α eine Wurzel der Gleichung

$$U_1 = 0$$

ist. Es sei nämlich

$$U_1 = b_2 (u - \alpha) (u - \beta)$$

Ferner sei

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{u - \alpha} + \frac{B}{u - \beta} \quad (10)$$

dann ist:

$$e^{\int \frac{U_0}{U_1} du} = e^{mu} (u - \alpha)^A (u - \beta)^B$$

und der in (67) stehende Werth von y wird sein:

$$y = \left\{ \frac{d^h}{du^h} \left[(u - \alpha)^{A+h} (u - \beta)^{B-1} e^{u(m+x)} \right] \right\}_\alpha$$

Das so eben gegebene y vereinfacht sich noch, wenn man die bisher willkürlich gebliebene Zahl h gleich $-A$ setzt, denn dann ist:

$$y = \left\{ \frac{d^{-A}}{du^{-A}} \left[(u - \beta)^{B-1} e^{u(m+x)} \right] \right\}_\alpha \quad (68)$$

und dies ist, wenn A eine reelle, ganze negative Zahl ist, ein tadelloses Integrale der Gleichung (14).

§. 29.

Der in (68) stehende Ausdruck lässt sich leicht in entwickelter Form darstellen. Bekanntlich ist

$$(PQ)^{(\mu)} = PQ^{(\mu)} + \binom{\mu}{1} P' Q^{(\mu-1)} + \binom{\mu}{2} P'' Q^{(\mu-2)} + \dots \quad (44)$$

setzt man nun in diese Reihe

$$P = (u - \beta)^{B-1}$$

$$Q = e^{u(m+x)}$$

$$\mu = -A$$

so erhält man für die Gleichung (68) folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} y &= (u - \beta)^{B-1} (m + x)^{-A} e^{u(m+x)} + \\ &+ \binom{-A}{1} (B-1) (u - \beta)^{B-2} (m + x)^{-A-1} e^{u(m+x)} + \\ &+ \binom{-A}{2} (B-1) (B-2) (u - \beta)^{B-3} (m + x)^{-A-2} e^{u(m+x)} + \dots \end{aligned}$$

Setzt man hierin für u die Zahl α , hebt dann durchgehends

$$(m + x)^{-A} e^{\alpha(m+x)}$$

als Factor heraus, so erhält man, wenn man der Kürze halber

$$\beta - \alpha = \gamma$$

$$m + x = \xi$$

setzt und den constanten Factor γ^{B-1} als überflüssig weglässt, für y folgende Reihe:

$$\begin{aligned} y &= \xi^{-A} e^{\alpha \xi} \left[1 + \binom{A}{1} \binom{B-1}{1} \cdot \frac{1}{\gamma \xi} + \binom{A+1}{2} \binom{B-1}{2} \cdot \frac{2!}{\gamma^2 \xi^2} + \right. \\ &\quad \left. + \binom{A+2}{3} \binom{B-1}{3} \cdot \frac{3!}{\gamma^3 \xi^3} + \dots \right] \quad (60) \end{aligned}$$

Diese Reihe ist mit der in §. 24 aufgestellten, daselbst mit (60) bezeichneten Reihe, identisch. Sie bricht ab, sobald A Null ist, oder eine reelle, ganze negative Zahl; ferner auch in dem Falle, in welchem B eine reelle, ganze positive Zahl ist. Findet weder das eine noch das andere statt, so ist die in (60) stehende Reihe eine divergente, denn es ist:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{A + n - 1}{n} \cdot \frac{B - n}{\gamma \xi}$$

was mit dem unendlichen Wachsen von n in's Unendliche wächst.

§. 30.

Ich werde nun noch einen Weg zeigen, wie man Gleichungen der Form (14) zu integrieren vermag. Sei wieder

$$(m + x) y'' + [A + B - (\alpha + \beta)(m + x)] y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m + x)] y = 0 \quad (14)$$

die vorgelegte Gleichung, und setzt man ebenfalls

$$y = e^{\alpha x} z$$

so erhält man:

$$(m + x) z'' + [A + B + (\alpha - \beta)(m + x)] z' + A(\alpha - \beta) z = 0 \quad (43)$$

und nun setze ich z in folgender Form voraus:*)

*) Das Integrale einer linearen Differentialgleichung ist in der, in (69) hingestellten, oder in einer dieser ähnlichen Form oftmals vorausgesetzt worden. Ich führe beispielsweise an: Euler in seinem Werke: *Institutiones calculi integralis*, vol. II, cap. X et XI; Wantzel in den *Comptes rendus* vom Jahre 1843; Raabe im III. Bande seiner Integralrechnung, 1847, Seite 280; Weiler im LI. Bande von Crelle's Journal 1856.

$$z = \int_{u_1}^{u_2} (x - u)^{\lambda-1} W du \quad (69)$$

wo W eine einstweilen noch unbekannte Function von u , hingegen λ , u_1 und u_2 constante, erst zu bestimmende Zahlen bedeuten. Aus (69) folgt:

$$z' = (\lambda - 1) \int_{u_1}^{u_2} (x - u)^{\lambda-2} W du$$

$$z'' = (\lambda - 1) (\lambda - 2) \int_{u_1}^{u_2} (x - u)^{\lambda-3} W du$$

und werden diese Werthe in die Gleichung (43) eingeführt, so erhält man:

$$\int_{u_1}^{u_2} (x - u)^{\lambda-3} W \{ (\lambda - 1) (\lambda - 2) (m + x) + (\lambda - 1) (x - u) [A + B + (\alpha - \beta) (m + x)] + \\ + A (\alpha - \beta) (x - u)^2 \} du = 0 \quad (70)$$

Um diese Gleichung zu vereinfachen, ordne man den in den Doppelklammern stehenden Ausdruck nach Potenzen von $x - u$. Zu dem Zwecke setze ich in demselben durchgehends statt $m + x$ seinen Werth $(x - u) + (m + u)$ und erhalte hiedurch:

$$(\lambda - 1) (\lambda - 2) (m + x) + (\lambda - 1) (x - u) [A + B + (\alpha - \beta) (m + x)] + A (\alpha - \beta) (x - u)^2 = \\ (\lambda - 1) (\lambda - 2) (x - u) + (\lambda - 1) (\lambda - 2) (m + u) + (\lambda - 1) (x - u) [A + B + (\alpha - \beta) (x - u) + (\alpha - \beta) (m + u)] + \\ + A (\alpha - \beta) (x - u)^2$$

Ordnet man nun den zweiten Theil dieser Gleichung nach Potenzen von $(x - u)$, so erhält man:

$$(A + \lambda - 1) (\alpha - \beta) (x - u)^2 + (\lambda - 1) [A + B + \lambda - 2 + (\alpha - \beta) (m + u)] (x - u) + \\ + (\lambda - 1) (\lambda - 2) (m + u)$$

oder in abgekürzter Form:

$$L (x - u)^2 + M (x - u) + N$$

woselbst L , M und N nachstehende Werthe haben:

$$L = (A + \lambda - 1) (\alpha - \beta) \\ M = (\lambda - 1) [A + B + \lambda - 2 + (\alpha - \beta) (m + u)] \\ N = (\lambda - 1) (\lambda - 2) (m + u)$$

Nun wollen wir, um unsere Rechnung zu vereinfachen, das bisher unbestimmt gelassene λ so wählen, dass

$$A + \lambda - 1 = 0$$

werde, alsdann ist:

$$L = 0 \\ M = -A [B - 1 + (\alpha - \beta) (m + u)] \\ N = A (A + 1) (m + u)$$

und die Gleichung (70) geht über in:

$$\int_{u_1}^{u_2} (x-u)^{-A-2} W \{ -A [B-1 + (\alpha-\beta)(m+u)] (x-u) + A(A+1)(m+u) \} du = 0 \quad (71)$$

Das zweite Glied dieser Gleichung, nämlich:

$$\int_{u_1}^{u_2} (x-u)^{-A-2} W A(A+1)(m+u) du$$

lässt sich folgendermassen schreiben:

$$A \int_{u_1}^{u_2} (m+u) W d \cdot (x-u)^{-A-1}$$

und dieses gibt, mittelst der Methode des theilweisen Integrirens behandelt:

$$A \left\{ (m+u) W (x-u)^{-A-1} \right\}_{u_1}^{u_2} - A \int_{u_1}^{u_2} (x-u)^{-A-1} \frac{d}{du} [(m+u) W] du$$

Setzt man dies in (71) ein, so erhält man:

$$A \left\{ (m+u) W (x-u)^{-A-1} \right\}_{u_1}^{u_2} - A \int_{u_1}^{u_2} (x-u)^{-A-1} \left\{ W [B-1 + (\alpha-\beta)(m+u)] + \frac{d}{du} [(m+u) W] \right\} du = 0$$

Dieser Gleichung genügt man, wenn man W so wählt, dass

$$W [B-1 + (\alpha-\beta)(m+u)] + \frac{d}{du} [(m+u) W] = 0 \quad (72)$$

wird, und die Integrationsgrenzen so, dass die Gleichung

$$(m+u) W (x-u)^{-A-1} = 0$$

für den gefundenen Werth von W befriedigt wird.

Die Gleichung (72) gibt integrirt:

$$W = (m+u)^{-B} e^{(\beta-\alpha)u}$$

es ist somit

$$z = \int_{u_1}^{u_2} (x-u)^{-A} (m+u)^{-B} e^{(\beta-\alpha)u} du$$

folglich ist:

$$y = e^{\alpha x} \int_{u_1}^{u_2} (x-u)^{-A} (m+u)^{-B} e^{(\beta-\alpha)u} du \quad (73)$$

das Integrale der Gleichung (14). Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen dient die Gleichung

$$(m+u)^{1-B} e^{(\beta-\alpha)u} (x-u)^{-A-1} = 0$$

Ihr genügt man, im Falle $B < 1$ ist, oder im Falle B imaginär, der reelle Bestandtheil von B aber < 1 ist, durch

$$u = -m$$

ferner auch für einen solchen Werth von u , welcher sich aus der Gleichung

$$(\beta - \alpha) u = -\infty$$

ergibt. Es sind somit die Integrationsgrenzen des in (73) stehenden Integrales

$$u_1 = -m \quad u_2 = -\frac{\infty}{\beta - \alpha}$$

Um das in (73) stehende Integrale zu vereinfachen, führen wir für u eine neue Variable v ein mittelst der Substitution

$$m + u = -\frac{v}{\beta - \alpha}$$

hiedurch erhält man, wenn man die constanten Factoren, mit denen y multiplicirt erscheint, weglässt, für y folgenden Werth:

$$y = e^{\alpha x} \int_0^{\infty} \left(x + m + \frac{v}{\beta - \alpha} \right)^{-A} v^{-B} e^{-v} dv \quad (74)$$

und dies ist das gesuchte Integrale der Gleichung (14) für den Fall $B < 1$.

§. 31.

Will man das in (74) stehende Integrale in Reihenform darstellen, so setze man zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \gamma \\ m + x &= \xi \end{aligned}$$

und entwickle sodann

$$\left(\xi + \frac{v}{\gamma} \right)^{-A}$$

mittelst der Newton'schen Binominalformel nach fallenden Potenzen von ξ man erhält dann:

$$y = e^{\alpha \xi} \xi^{-A} \int_0^{\infty} \left[1 - A \cdot \frac{v}{\gamma \xi} + \binom{A+1}{2} \frac{v^2}{\gamma^2 \xi^2} - \binom{A+2}{3} \frac{v^3}{\gamma^3 \xi^3} + \dots \right] v^{-B} e^{-v} dv$$

Nun ist bekanntlich für positive Werthe von m

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{m-1} du$$

folglich hat man:

$$y = e^{\alpha \xi} \xi^{-A} \left[\Gamma(1-B) - A \cdot \frac{\Gamma(2-B)}{\gamma \xi} + \binom{A+1}{2} \frac{\Gamma(3-B)}{\gamma^2 \xi^2} - \binom{A+2}{3} \frac{\Gamma(4-B)}{\gamma^3 \xi^3} + \dots \right]$$

und wenn man berücksichtigt, dass

$$\Gamma(n+1-B) = (1-B)(2-B)(3-B) \dots (n-B) \Gamma(1-B) \quad (22)$$

ist

$$y = e^{\alpha \xi} \xi^{-A} \left[1 - A \cdot \frac{1-B}{\gamma \xi} + \binom{A+1}{2} \frac{(1-B)(2-B)}{\gamma^2 \xi^2} - \binom{A+2}{3} \frac{(1-B)(2-B)(3-B)}{\gamma^3 \xi^3} + \dots \right] \quad (60)$$

welche Reihe schon wiederholt auftrat (man sehe §. 24 und §. 29),

Es tritt hier ein ganz merkwürdiger Fall ein, der bisher viel zu wenig beachtet wurde.

Das in (74) stehende Integrale gilt nur, wenn B , oder der reelle Bestandtheil von B , kleiner als 1 ist; die in (60) stehende Reihe, welche aus dem Integrale (74) hervorging, ist, falls sie nicht abbricht, für Werthe von B , die kleiner als 1 sind, divergent.

Aus diesem Umstande sehen wir uns veranlasst, auf das in (74) stehende Integrale, weil es entwickelt auf eine divergente Reihe führt, ganz zu verzichten.

§. 32.

Es ist mir also bisher gelungen, das vollständige Integrale der Gleichung (14) in allen Fällen anzugeben, mit Ausnahme des einzigen Falles, in welchem A und B von folgender Gestalt sind:

$$\begin{aligned} A &= p + q\sqrt{-1} \\ B &= p - q\sqrt{-1} \end{aligned}$$

wobei p eine ganze positive, oder eine ganze negative Zahl oder gleich Null, und $q \geq 0$ ist. Man ist, falls p positiv ist, mittelst der Laplace'schen Methode, und falls p nicht positiv ist, nach vorgenommener Substitution von

$$y = (m + x)^{1-A-B} z$$

und nachheriger Anwendung der Laplace'schen Methode jederzeit im Stande, ein particuläres Integrale anzugeben, und findet dann das andere mittelst der Methode der Variation der willkürlichen Constanten. Doch ist dies auf diese Weise erhaltene Integrale nicht von so einfachem Baue und hat auch nicht die durchsichtige Form, wie die Integrale haben, die wir in andern Fällen gefunden haben.

§. 33.

Bevor ich dieses Capitel schliesse, will ich bemerken, dass alle Mathematiker vor mir, welche sich mit der Integration der in diesem Capitel betrachteten Differentialgleichungen befassten, der Gleichung

$$e^{u(m+x)} (u - \alpha)^A (u - \beta)^B = 0 \quad (15)$$

Genüge leisteten nicht nur für $u = \alpha$ und $u = \beta$, sondern auch *)

im Falle $m + x$ positiv ist, durch $u = -\infty$ und

„ „ $m + x$ negativ „ „ $u = +\infty$

*) Euler allein macht eine Ausnahme. In der von Prof. Salomon übersetzten vollständigen Anleitung zur Integralrechnung Euler's, kömmt im II. Bande, Seite 228 die Gleichung vor:

$$x y'' + (n + v + 2 - a x) y' - a (n + 1) y = 0$$

und hiefür gibt Euler blos das eine Integral an:

$$y = \int_0^a e^{u x} u^n (a - u)^v du$$

Sind demnach A und B positive Zahlen, oder imaginäre Zahlen, deren reelle Bestandtheile positiv sind, so ist namentlich nach Laplace, Petzval, Mainardi, Weiler *), Schlömilch **) das vollständige Integrale der Gleichung (14), im Falle $m + x$ negativ ist:

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du + C_2 \int_{\alpha}^{+\infty} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du \quad (75)$$

und im Falle $m + x$ positiv ist:

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du + C_2 \int_{\alpha}^{-\infty} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du$$

Die von mir in diesem Capitel aufgestellten vollständigen Integrale der Gleichung (14) sind weit complicirter als die eben jetzt aufgestellten Integrale, aber sie haben drei wesentliche Vorthelle vor den eben angeführten voraus, nämlich:

Erstens sind meine Integrale gültig, ob x positiv oder negativ, reell oder imaginär ist.

Zweitens lassen sich bei den von mir aufgestellten vollständigen Integralen die willkürlichen Constanten bestimmen durch Bedingungen etwa der folgenden Art:

$$\begin{array}{ll} \text{für } m + x = -K & \text{soll } y = M \text{ sein} \\ \text{„ } m + x = +K & \text{„ } y = N \text{ „} \end{array}$$

woselbst K , M und N beliebige Zahlen bedeuten, was sich bei den oben aufgestellten Integralen nicht thun lässt, weil das Integral (75) z. B. nur für negative Werthe von $m + x$ gilt; man kann daher bei dem Integral (75) bloß die erste Bedingung in Rechnung bringen, nicht aber die zweite.

Drittens lassen sich die von mir aufgestellten Integrale, wie ich nachgewiesen habe, in unendliche convergente Reihen entwickeln, und diese Reihen leisten auch den Differentialgleichungen Genüge. Anders aber ist es mit dem in (75) stehenden Integrale. Versucht man die oben aufgestellten Integrale, etwa

$$y = \int_{\alpha}^{\infty} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du, \quad m + x < 0 \quad (76)$$

in unendliche Reihen zu entwickeln, so sind diese divergent; ich bin durch dies gar nicht einmal von der Richtigkeit des Integrales (75) überzeugt, ja ich weiss nicht einmal, ob überhaupt das Integrale (75) einen Sinn hat, so wenig ich weiss, ob und welchen Sinn eine divergente Reihe hat.

Um den eben ausgesprochenen Satz zu beweisen, will ich das Integrale (76) in unendliche Reihen entwickeln. Zu dem Zwecke führe ich in (76) für u eine neue Variable ω ein, mittelst der Gleichung

*) Siehe im XXXII. und im XXXV. Bande von Grunert's Archiv für Mathematik.

**) Siehe dessen Zeitschrift für Mathematik und Physik, V. Band (1860).

$$u = \alpha + (\beta - \alpha) \omega$$

und setze hiebei, was wohl erlaubt ist, $\beta - \alpha$ als positiv voraus. Alsdann erhält man, wenn man der Kürze halber

$$\begin{aligned} m + x &= \xi \\ \beta - \alpha &= \gamma \end{aligned}$$

setzt und genau den in §. 6 betretenen Weg einschlägt,

$$y = e^{\alpha \xi} \int_0^{\infty} e^{\gamma \omega \xi} \omega^{A-1} (1 - \omega)^{B-1} d\omega$$

In diesem Integrale ist γ nach der Voraussetzung positiv, ferner ist ω , da dasselbe alle Werthe von 0 bis ∞ durchläuft, auch positiv, ξ ist nach der Voraussetzung negativ. Führen wir nun für ω eine neue Variable v in Rechnung ein mittelst der Substitution:

$$\gamma \omega \xi = -v$$

so ist dem eben Gesagten gemäss v eine positive Grösse und man erhält, wenn man alle constante Factoren, die in y auftreten, weglässt

$$y = \frac{e^{\alpha \xi}}{\xi^A} \int_0^{\infty} e^{-v} v^{A-1} \left(1 + \frac{v}{\gamma \xi}\right)^{B-1} dv$$

Dies lässt sich auch so schreiben:

$$y = \frac{e^{\alpha \xi}}{\xi^A} \int_0^{\infty} e^{-v} v^{A-1} \left[1 + \binom{B-1}{1} \frac{v}{\gamma \xi} + \binom{B-1}{2} \frac{v^2}{\gamma^2 \xi^2} + \binom{B-1}{3} \frac{v^3}{\gamma^3 \xi^3} + \dots\right] dv$$

oder wenn man mit v^{A-1} in die eckige Klammer hineinmultiplicirt, folgendermassen:

$$y = \frac{e^{\alpha \xi}}{\xi^A} \int_0^{\infty} e^{-v} \left[v^{A-1} + \binom{B-1}{1} \frac{v^A}{\gamma \xi} + \binom{B-1}{2} \frac{v^{A+1}}{\gamma^2 \xi^2} + \binom{B-1}{3} \frac{v^{A+2}}{\gamma^3 \xi^3} + \dots\right] dv$$

Nun ist

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} e^{-v} v^{m-1} dv$$

folglich ist

$$y = \frac{e^{\alpha \xi}}{\xi^A} \left[\Gamma(A) + \binom{B-1}{1} \frac{\Gamma(A+1)}{\gamma \xi} + \binom{B-1}{2} \frac{\Gamma(A+2)}{\gamma^2 \xi^2} + \binom{B-1}{3} \frac{\Gamma(A+3)}{\gamma^3 \xi^3} + \dots \right]$$

Lässt man durchgehends den constanten Factor $\Gamma(A)$ weg, so erhält man:

$$y = \frac{e^{\alpha \xi}}{\xi^A} \left[1 + \binom{B-1}{1} \frac{A}{\gamma \xi} + \binom{B-1}{2} \frac{A(A+1)}{\gamma^2 \xi^2} + \binom{B-1}{3} \frac{A(A+1)(A+2)}{\gamma^3 \xi^3} + \dots \right]$$

und dies ist genau die in (60) aufgestellte Reihe, welche in allen Fällen, in welchen sie nicht abbricht, divergent ist, denn man hat:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{B-n}{n} \cdot \frac{A+n-1}{\gamma \xi}$$

was für wachsende Werthe von n in's Unendliche wächst.

Zweites Capitel.

§. 34.

Nachdem ich also die Gleichung (14) vollständig integrierte, wende ich mich zur Discussion des zweiten Hauptfalles, in welchem nämlich

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{(u - \alpha)^2} + \frac{B}{u - \alpha} \quad (11)$$

ist. In diesem Falle hat man, wenn man die in §. 1 vorgetragene Laplace'sche Methode befolgt:

$$\int \frac{U_0}{U_1} du = mu - \frac{A}{u - \alpha} + B \log (u - \alpha)$$

ferner

$$V = (u - \alpha)^{B-2} \cdot e^{\frac{mu - \frac{A}{u - \alpha}}{u - \alpha}}$$

und die Gleichung, welche zur Bestimmung der Integrationsgrenzen dient, lautet nun:

$$(u - \alpha)^B \cdot e^{\frac{u(m+\alpha) - \frac{A}{u - \alpha}}{u - \alpha}} = 0$$

allein aus dieser Gleichung findet man nicht zwei Werthe für u ; man gelangt daher auch nicht zu zwei Integrationsgrenzen für das Integrale

$$y = \int e^{\frac{u(m+\alpha) - \frac{A}{u - \alpha}}{u - \alpha}} (u - \alpha)^{B-2} du$$

und ist somit genöthigt, in diesem Falle einen andern Weg aufzusuchen, um die vorgelegte Gleichung zu integrieren.

§. 35.

Bevor wir dies aber thun, führen wir analog der früheren Vorgangsweise in die Gleichung

$$(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0 \quad (1)$$

statt den Constanten a_2, a_1, a_0 ; b_2, b_1, b_0 die Constanten m, A, B, α ein. Thut man dies, so hat man, weil die Gleichung

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{a_2 u^2 + a_1 u + a_0}{b_2 u^2 + b_1 u + b_0} = m + \frac{A}{(u - \alpha)^2} + \frac{B}{u - \alpha} \quad (11)$$

identisch sein soll, vorerst

$$b_2 u^2 + b_1 u + b_0 = b_2 (u - \alpha)^2$$

zu setzen, und sodann ergibt sich

$$a_2 = b_2 m$$

$$a_1 = b_2 (B - 2\alpha m)$$

$$a_0 = b_2 (m\alpha^2 - B\alpha + A)$$

$$b_1 = -2b_2\alpha$$

$$b_0 = b_2\alpha^2$$

Werden diese Werthe in die Gleichung (1) gesetzt, so erhält man:

$$(m+x)y'' + [B - 2\alpha(m+x)]y' + [A - B\alpha + \alpha^2(m+x)]y = 0 \quad (77)$$

und diese Gleichung wollen wir nun integrieren.

Zu dem Zwecke setzen wir

$$y = e^{\alpha x} z$$

man kömmt alsdann zu der Gleichung:

$$(m+x)z'' + Bz' + Az = 0 \quad (78)$$

und in diese führen wir für x eine neue Variable ξ ein, mittelst der Substitution

$$m+x = \xi^2 \quad (79)$$

Es ist nun:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} \quad (80)$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{dz}{d\xi} \cdot \frac{d^2 \xi}{dx^2} + \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 \cdot \frac{d^2 z}{d\xi^2} \quad (81)$$

Die Gleichung (79) gibt differenzirt:

$$dx = 2\xi d\xi$$

folglich ist:

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{2\xi}$$

und

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} = -\frac{1}{2\xi^2} \cdot \frac{d\xi}{dx} = -\frac{1}{4\xi^3}$$

Demnach hat man, wenn man diese Werthe in (80) und (81) einführt:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= z' = \frac{1}{2\xi} \cdot \frac{dz}{d\xi} \\ \frac{d^2 z}{dx^2} &= z'' = -\frac{1}{4\xi^3} \cdot \frac{dz}{d\xi} + \frac{1}{4\xi^2} \cdot \frac{d^2 z}{d\xi^2} \end{aligned}$$

Führt man nun diese Werthe in (78) ein, so erhält man:

$$\xi^2 \left[-\frac{1}{4\xi^3} \cdot \frac{dz}{d\xi} + \frac{1}{4\xi^2} \cdot \frac{d^2 z}{d\xi^2} \right] + \frac{B}{2\xi} \cdot \frac{dz}{d\xi} + Az = 0$$

und wenn man diese Gleichung von Brüchen befreit und ordnet, so erhält man:

$$\xi \frac{d^2 z}{d\xi^2} + (2B-1) \frac{dz}{d\xi} + 4A\xi z = 0 \quad (82)$$

und diese Gleichung ist ein specieller Fall der im vorigen Capitel so ausführlich discutirten Gleichung (14).

Setzt man nämlich in die Gleichung

$$(m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)]y = 0 \quad (14)$$

statt m die Zahl 0

„ A „ „ $B - \frac{1}{2}$

„ B „ „ $B - \frac{1}{2}$

„ α „ „ $-2\sqrt{-A}$

„ β „ „ $+2\sqrt{-A}$

„ x die Variable ξ

„ y „ „ z

so kommt man zur Gleichung (82). Es ist daher die Gleichung (82) vollständig integrirbar, und hat man das z als Function von ξ gefunden, so hat man für ξ und z die aus den Gleichungen

$$\xi^2 = m + x \quad (79)$$

$$y = e^{\alpha x} z$$

hervorgehenden Werthe einzusetzen, um sodann y als Function von x zu erhalten.

In dem speciellen Falle, in welchem $A = 0$ ist, geht die Gleichung (78) über in

$$(m + x) z'' + B z' = 0$$

und diese gibt integrirt:

$$z = C_1 + C_2 \int \frac{dx}{(m + x)^B}$$

folglich ist das vollständige Integrale der Gleichung (77) in dem Specialfalle $A = 0$, in welchem dieselbe von der Form:

$$(m + x) y'' + [B - 2\alpha(m + x)] y' + [-B\alpha + \alpha^2(m + x)] y = 0$$

ist, nachstehendes:

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x} \int \frac{dx}{(m + x)^B}$$

§. 36.

Man kann die Gleichung

$$(m + x) y'' + [B - 2\alpha(m + x)] y' + [A - B\alpha + \alpha^2(m + x)] y = 0 \quad (77)$$

auch noch auf andere Art integriren. Setzt man wieder in dieselbe

$$y = e^{\alpha x} z$$

so erhält man:

$$(m + x) z'' + B z' + A z = 0 \quad (78)$$

Differenzirt man diese Gleichung μ mal nach x , so erhält man:

$$(m + x) z^{(\mu+2)} + (\mu + B) z^{(\mu+1)} + A z^{(\mu)} = 0$$

und setzt man in dieselbe

$$z^{(\mu)} = Z$$

so kommt man zu folgender Gleichung:

$$(m + x) Z'' + (\mu + B) Z' + A Z = 0$$

Nun führen wir in diese Gleichung für x eine neue Variable ξ ein mittelst der Substitution:

$$m + x = \xi^2 \quad (79)$$

so kommt man, denselben Gang wie im vorhergehenden § einschlagend, zu nachstehender Gleichung:

$$\xi \frac{d^2 Z}{d\xi^2} + (2B + 2\mu - 1) \frac{dZ}{d\xi} + 4A\xi Z = 0$$

Diese Gleichung vereinfacht sich wesentlich, wenn man μ so wählt, dass

$$2B + 2\mu - 1 = 0 \quad (83)$$

wird, denn man gelangt dann, durch ξ abkürzend, zu der Gleichung:

$$\frac{d^2 Z}{d\xi^2} + 4AZ = 0$$

welche constante Coefficienten hat und deren Integrale demnach folgendes ist:

$$Z = C_1 e^{+2\xi\sqrt{-A}} + C_2 e^{-2\xi\sqrt{-A}}$$

woselbst C_1 und C_2 willkürliche Constante bedeuten.

Setzt man hierein für ξ seinen aus (79) folgenden Werth, ferner für Z seinen Werth $z^{(\mu)}$, so hat man:

$$z^{(\mu)} = C_1 e^{+2\sqrt{-A(m+x)}} + C_2 e^{-2\sqrt{-A(m+x)}}$$

setzt man nun auch für μ seinen aus (83) folgenden Werth, so erhält man:

$$z^{(\frac{1}{2}-B)} = C_1 e^{+2\sqrt{-A(m+x)}} + C_2 e^{-2\sqrt{-A(m+x)}}$$

hieraus folgt, wenn man diese Gleichung $B - \frac{1}{2}$ mal nach x differenzirt:

$$z = \frac{d^{B-\frac{1}{2}}}{dx^{B-\frac{1}{2}}} \left[C_1 e^{+2\sqrt{-A(m+x)}} + C_2 e^{-2\sqrt{-A(m+x)}} \right]$$

und folglich ist:

$$y = e^{ax} \frac{d^{B-\frac{1}{2}}}{dx^{B-\frac{1}{2}}} \left[C_1 e^{+2\sqrt{-A(m+x)}} + C_2 e^{-2\sqrt{-A(m+x)}} \right] \quad (84)$$

das Integrale der Gleichung (77), und dies ist tadellos in dem Falle, in welchem $B - \frac{1}{2}$ Null ist, oder in welchem $B - \frac{1}{2}$ eine ganze positive Zahl bedeutet.

§. 37.

Die Methode, die eingeschlagen wurde, um das Integrale (84) zu erhalten, ist nicht ganz strenge, aber es lässt sich sehr leicht nachweisen, dass das in (84) stehende Integrale richtig ist in dem Falle, in welchem $B - \frac{1}{2}$ Null ist oder eine ganze positive Zahl, und dies wollen wir nun thun.

Setzen wir vorerst $B = \frac{1}{2}$ und beweisen wir, dass

$$z_1 = e^{+2\sqrt{-A(m+x)}} \quad (85)$$

der Gleichung

$$(m+x) z_1'' + \frac{1}{2} z_1' + A z_1 = 0 \quad (86)$$

genügt. Zu dem Zwecke bilden wir uns z_1' und z_1'' . Es ist:

$$z_1' = \frac{\sqrt{-A}}{\sqrt{m+x}} \cdot e^{+2\sqrt{-A(m+x)}}$$

$$z_1'' = e^{+2\sqrt{-A(m+x)}} \left[-\frac{A}{m+x} - \frac{\sqrt{-A}}{2(m+x)\sqrt{m+x}} \right]$$

Werden diese Werthe in (86) eingesetzt, so wird diese Gleichung identisch, folglich genügt wirklich der Gleichung (86) der in (85) stehende Werth von z_1 .

Differenzirt man nun die Gleichung (86) $B - \frac{1}{2}$ mal nach x , unter $B - \frac{1}{2}$ eine ganze positive Zahl verstanden, so erhält man:

$$(m + x) z_1^{(B+\frac{3}{2})} + B z_1^{(B+\frac{1}{2})} + A z_1^{(B-\frac{1}{2})} = 0$$

und dieser Gleichung genügt offenbar auch derselbe Werth von z_1 , nämlich

$$z_1 = e^{+2\sqrt{-A(m+x)}} \quad (85)$$

Setzt man nun in den beiden letzten Gleichungen

$$z_1^{(B-\frac{1}{2})} = z$$

so kömmt man zu der Gleichung

$$(m + x) z'' + B z' + A z = 0 \quad (78)$$

welcher genügt wird durch

$$z = \frac{d^{B-\frac{1}{2}}}{dx^{B-\frac{1}{2}}} \left[e^{+2\sqrt{-A(m+x)}} \right]$$

es ist daher die Richtigkeit des ersten particulären Integrales bewiesen, und genau so lässt sich auch die Richtigkeit des zweiten particulären Integrales darthun.

§. 38.

Die Substitution

$$y = (m + x)^2 z$$

welche im §. 9 für Gleichungen der Form (14) in Anwendung gebracht wurde, lässt sich auch für Gleichungen der Form (77) mit Nutzen anwenden. Man erhält nämlich:

$$(m + x)^2 z'' + (m + x) [B + 2\lambda - 2\alpha(m + x)] z' + [\lambda(B + \lambda - 1) + (A - B\alpha - 2\alpha\lambda)(m + x) + \alpha^2(m + x)^2] z = 0$$

Diese Gleichung vereinfacht sich sowohl für

$$\lambda = 0$$

als auch für

$$\lambda = 1 - B$$

Die erste Substitution $\lambda = 0$ führt, durch $m + x$ dividirt, auf die vorgelegte Gleichung; die zweite Substitution $\lambda = 1 - B$ führt, durch $m + x$ dividirt, auf die Gleichung

$$(m + x) z'' + [2 - B - 2\alpha(m + x)] z' + [A + B\alpha - 2\alpha + \alpha^2(m + x)] z = 0$$

welche genau die Gestalt der Gleichung (77) hat, und sich blos dadurch von ihr unterscheidet, dass statt der Buchstaben

$$y \quad \text{und} \quad B$$

folgende andere stehen:

$$z \quad \text{und} \quad z - B$$

Sie gibt, nach der im §. 36 gegebenen Methode behandelt,

$$z = e^{\alpha x} \frac{d^{\frac{3}{2}-B}}{dx^{\frac{3}{2}-B}} \left[C_1 e^{+2\sqrt{-A(m+x)}} + C_2 e^{-2\sqrt{-A(m+x)}} \right]$$

folglich kann man für das Integrale der Gleichung (77) auch folgenden Ausdruck aufstellen:

$$y = (m + x)^{1-B} e^{\alpha x} \frac{d^{\frac{3}{2}-B}}{dx^{\frac{3}{2}-B}} \left[C_1 e^{+2\sqrt{-A(m+x)}} + C_2 e^{-2\sqrt{-A(m+x)}} \right] \quad (87)$$

und dies ist zweckmässig anwendbar in allen jenen Fällen, in welchen $\frac{3}{2} - B$ Null ist, oder eine ganze positive Zahl; C_1 und C_2 bedeuten hier wieder willkürliche Constante.

§. 39.

Wir haben in diesem Capitel das Integrale der Differentialgleichung

$$(m + x) y'' + [B - 2\alpha(m + x)] y' + [A - B\alpha + \alpha^2(m + x)] y = 0 \quad (77)$$

in dem Falle, in welchem $B - \frac{1}{2}$ eine reelle, ganze positive Zahl bezeichnet, in folgender Form gegeben:

$$y = e^{\alpha x} \frac{d^{B-\frac{1}{2}}}{dx^{B-\frac{1}{2}}} \left[C_1 e^{+2\sqrt{-A(m+x)}} + C_2 e^{-2\sqrt{-A(m+x)}} \right] \quad (84)$$

und in dem Falle, in welchem $\frac{3}{2} - B$ eine reelle, ganze positive Zahl ist, in nachstehender Form:

$$y = (m + x)^{1-B} e^{\alpha x} \frac{d^{\frac{3}{2}-B}}{dx^{\frac{3}{2}-B}} \left[C_1 e^{+2\sqrt{-A(m+x)}} + C_2 e^{-2\sqrt{-A(m+x)}} \right] \quad (87)$$

und nun wollen wir diese Integrale in entwickelter Gestalt geben. Am einfachsten lässt sich dies machen, wenn man von der Gleichung

$$\xi \frac{d^2 z}{d\xi^2} + (2B - 1) \frac{dz}{d\xi} + 4A\xi z = 0 \quad (82)$$

ausgeht, welche wir erhielten, indem wir in (77) die beiden Substitutionen

$$y = e^{\alpha x} z \quad \text{und} \quad m + x = \xi^2$$

durchführten. Das Integrale der Gleichung (82) ergibt sich aus der Formel (59) welche lautet:

$$y = \frac{e^{\beta x}}{(m + x)^B} \left[1 - \binom{A-1}{1} \binom{B}{1} \frac{1}{(\beta - \alpha)(m + x)} + \binom{A-1}{2} \binom{B+1}{2} \frac{2!}{(\beta - \alpha)^2 (m + x)^2} - \right. \\ \left. - \binom{A-1}{3} \binom{B+2}{3} \frac{3!}{(\beta - \alpha)^3 (m + x)^3} + \dots \right] \quad (59)$$

indem wir in diese schreiben

statt	m	die	Zahl	0
"	A	"	"	$B - \frac{1}{2}$
"	B	"	"	$B - \frac{1}{2}$
"	α	"	"	$-2\sqrt{-A}$
"	β	"	"	$+2\sqrt{-A}$
"	x	die	Variable	ξ
"	y	"	"	z

Wir erhalten so

$$z = \frac{e^{2\xi\sqrt{-A}}}{\xi^{B-\frac{1}{2}}} \left[1 - \binom{B-\frac{3}{2}}{1} \binom{B-\frac{1}{2}}{1} \frac{1}{4\xi\sqrt{-A}} + \binom{B-\frac{3}{2}}{2} \binom{B+\frac{1}{2}}{2} \frac{2!}{\xi^2(4\sqrt{-A})^2} - \right. \\ \left. - \binom{B-\frac{3}{2}}{3} \binom{B+\frac{3}{2}}{3} \frac{3!}{\xi^3(4\sqrt{-A})^3} + \dots \right]$$

oder in geordneter Form:

$$z = \frac{e^{2\xi\sqrt{-A}}}{\xi^{B-\frac{1}{2}}} \left[1 - \frac{(2B-3)(2B-1)}{16 \cdot \xi\sqrt{-A}} + \frac{(2B-5)(2B-3)(2B-1)(2B+1)}{16^2 \cdot 2! (\xi\sqrt{-A})^2} - \right. \\ \left. - \frac{(2B-7)(2B-5)(2B-3)(2B-1)(2B+1)(2B+3)}{16^3 \cdot 3! (\xi\sqrt{-A})^3} + \dots \right]$$

Würden wir behufs der Entwicklung des Integrales der Gleichung (82) statt der Formel (59) die Formel (60) anwenden, so käme man zu einem ganz ähnlichen Ausdruck, der sich bloß in dem Zeichen der hier vorkommenden Quadratwurzel von dem so eben gefundenen Ausdrucke unterscheidet.

Setzt man dann in den erhaltenen Resultaten statt ξ seinen Werth $\sqrt{m+x}$ und bedenkt, dass $y = e^{\alpha x} z$ ist, so erhält man:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \frac{e^{+2\sqrt{-A}(m+x)}}{(\sqrt{m+x})^{B-\frac{1}{2}}} \left[1 - \frac{(2B-3)(2B-1)}{16 \cdot \sqrt{-A}(m+x)} + \frac{(2B-5)(2B-3)(2B-1)(2B+1)}{16^2 \cdot 2! (\sqrt{-A}(m+x))^2} - \right. \\ \left. - \frac{(2B-7)(2B-5)(2B-3)(2B-1)(2B+1)(2B+3)}{16^3 \cdot 3! (\sqrt{-A}(m+x))^3} + \dots \right] + \\ + C_2 e^{\alpha x} \frac{e^{-2\sqrt{-A}(m+x)}}{(\sqrt{m+x})^{B-\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{(2B-3)(2B-1)}{16 \cdot \sqrt{-A}(m+x)} + \frac{(2B-5)(2B-3)(2B-1)(2B+1)}{16^2 \cdot 2! (\sqrt{-A}(m+x))^2} + \right. \\ \left. + \frac{(2B-7)(2B-5)(2B-3)(2B-1)(2B+1)(2B+3)}{16^3 \cdot 3! (\sqrt{-A}(m+x))^3} + \dots \right]$$

Diese Reihen, in welchen C_1 und C_2 willkürliche Constante bezeichnen, brechen ab sowohl in dem Falle, in welchem $B - \frac{1}{2}$ als auch in jenem Falle, in welchem $\frac{3}{2} - B$ eine reelle, ganze positive Zahl ist; sie geben somit die Entwicklungen der beiden mit (84) und mit (87) bezeichneten Formeln.

Drittes Capitel.

§. 40.

Nachdem also auch die Gleichungen der Form (77) vollständig discutirt worden, komme ich zur Betrachtung des Falles, wo U_1 ein Polynom des ersten Grades ist, also die vorgelegte Gleichung die Gestalt hat:

$$a_2 y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0 \quad (88)$$

Es ist alsdann:

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{a_2 u^2 + a_1 u + a_0}{b_1 u + b_0} = m + nu + \frac{A}{u - \alpha} \quad (12)$$

Führt man in die Gleichung (88) statt a_2, a_1, a_0, b_1, b_0 die Buchstaben m, n, A und α in Rechnung ein, so hat man, da

$$b_1 u + b_0 = b_1 (u - \alpha)$$

und ferner

$$\frac{a_2 u^2 + a_1 u + a_0}{b_1 u + b_0} = m + nu + \frac{A}{u - \alpha}$$

identisch stattfindet, nachstehende Werthe für a_2, a_1, a_0, b_1, b_0

$$a_2 = b_1 n$$

$$a_1 = b_1 (m - n\alpha)$$

$$a_0 = b_1 (A - m\alpha)$$

$$b_0 = -b_1 \alpha$$

folglich nimmt die zu integrierende Gleichung die Gestalt an:

$$n y'' + (m + x - n\alpha) y' + [A - \alpha(m + x)] y = 0 \quad (89)$$

§. 41.

Die Gleichung (89) gibt, nach der Laplace'schen Methode behandelt, da

$$\frac{U_0}{U_1} = m + nu + \frac{A}{u - \alpha} \quad (12)$$

ist

$$\int \frac{U_0}{U_1} du = mu + \frac{n}{2} u^2 + A \log(u - \alpha)$$

und

$$V = (u - \alpha)^{A-1} e^{mu + \frac{n}{2} u^2}$$

folglich ist:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} (u - \alpha)^{A-1} e^{u(m+x) + \frac{n}{2} u^2} du$$

unter u_1 und u_2 constante Zahlen, und zwar die Wurzeln der Gleichung

$$(u - \alpha)^A e^{u(m+x) + \frac{n}{2} u^2} = 0 \quad (90)$$

verstanden.

Will man nun das vollständige Integrale der Gleichung (89) aufstellen, so hat man eine genaue Discussion der Gleichung (90) vorzunehmen.

Ich betrachte also erstens den Fall, in welchem A positiv und n negativ ist; alsdann sind die Wurzeln der Gleichung (90)

$$u = \alpha, \quad u = +\infty, \quad u = -\infty$$

folglich hat man in diesem Falle folgendes vollständige Integrale der Gleichung (89)

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{+\infty} (u - \alpha)^{A-1} e^{u(m+x) + \frac{n}{2} u^2} du + C_2 \int_{\alpha}^{-\infty} (u - \alpha)^{A-1} e^{u(m+x) + \frac{n}{2} u^2} du \quad (91)$$

C_1 und C_2 bedeuten willkürliche Constante.

Man kann dieses Integrale leicht transformiren. Setzt man nämlich im ersten Integrale $u - \alpha = \lambda$, im zweiten Integrale $u - \alpha = -\lambda$, so erhält man:

$$y = e^{\alpha x} \int_0^{\infty} \lambda^{A-1} e^{\frac{n}{2} \lambda^2} \left[L_1 e^{+\lambda(m+x+n\alpha)} + L_2 e^{-\lambda(m+x+n\alpha)} \right] d\lambda \quad (92)$$

woselbst L_1 und L_2 willkürliche Constante bedeuten.

Im Falle A eine ganze positive Zahl bedeutet, kann man das letzte Integrale auch auf folgende Art schreiben:

$$y = e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \int_0^{\infty} e^{\frac{n}{2} \lambda^2} \left[L_1 e^{+\lambda(m+x+n\alpha)} + L_2 e^{-\lambda(m+x+n\alpha)} \right] d\lambda \quad (93)$$

Ich komme nun zweitens zu dem Falle, in welchem beide Zahlen A und n positiv sind. Die Wurzeln der Gleichung (90) sind alsdann:

$$u = \alpha, \quad u = +\infty \sqrt{-1}, \quad u = -\infty \sqrt{-1}$$

und das vollständige Integrale der Gleichung (89) ist alsdann:

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{+\infty \sqrt{-1}} (u - \alpha)^{A-1} e^{u(m+x) + \frac{n}{2} u^2} du + C_2 \int_{\alpha}^{-\infty \sqrt{-1}} (u - \alpha)^{A-1} e^{u(m+x) + \frac{n}{2} u^2} du$$

unter C_1 und C_2 willkürliche Constante verstanden.

Führt man statt u eine neue Variable λ in die Rechnung ein, und zwar in der Art, dass man im ersten Integrale $u - \alpha = \lambda \sqrt{-1}$ und im zweiten Integrale $u - \alpha = -\lambda \sqrt{-1}$ setzt, so erhält man:

$$y = e^{\alpha x} \int_0^{\infty} \lambda^{A-1} e^{-\frac{n}{2} \lambda^2} \left[L_1 e^{+\lambda(m+x+n\alpha)\sqrt{-1}} + L_2 e^{-\lambda(m+x+n\alpha)\sqrt{-1}} \right] d\lambda \quad (94)$$

woselbst wieder L_1 und L_2 willkürliche Constante sind.

Im Falle A eine ganze positive Zahl bedeutet, kann man dieses in (94) stehende Integrale auch so schreiben:

$$y = e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{n}{2} \lambda^2} \left[L_1 e^{+\lambda(m+x+n\alpha)\sqrt{-1}} + L_2 e^{-\lambda(m+x+n\alpha)\sqrt{-1}} \right] d\lambda \quad (95)$$

Sind drittens beide Zahlen A und n negativ, so sind die Wurzeln der Gleichung (90)

$$u = -\infty \quad \text{und} \quad u = +\infty$$

und ein particuläres Integrale der Gleichung (89) erscheint dann in der Form:

$$y = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - \alpha)^{A-1} e^{u(m+x) + \frac{n}{2} u^2} du$$

dies ist aber unbrauchbar, weil das bestimmte Integrale innerhalb der Integrationsgrenzen durch ∞ geht; endlich viertens ist, im Falle A Null oder negativ, und n positiv ist, ein particuläres Integrale der Gleichung (89)

$$y = \int_{-\infty \sqrt{-1}}^{+\infty \sqrt{-1}} (u - \alpha)^{A-1} e^{u(m+x) + \frac{n}{2} u^2} du$$

Dies geht durch Einführung einer neuen Variablen λ mittelst der Substitution

$$u - \alpha = \lambda \sqrt{-1}$$

über in

$$y = e^{\alpha x} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{A-1} e^{\lambda(m+x+n\alpha)\sqrt{-1} - \frac{n}{2} \lambda^2} d\lambda$$

und dies ist ebenfalls unbrauchbar, weil wieder das bestimmte Integrale innerhalb der Integrationsgrenzen durch ∞ geht.

§. 42.

Aus dem vorhergehenden §. sieht man, dass man mittelst der Laplace'schen Methode in dem Falle, in welchem A eine negative Zahl ist, das Integrale der Gleichung (89) nicht anzugeben vermag; ich suchte daher für den Fall negativer Werthe von A einen andern Weg einzuschlagen. Ich führe nämlich in die Gleichung

$$n y'' + (m + x - n\alpha) y' + [A - \alpha(m + x)] y = 0 \quad (89)$$

für y eine neue Variable z ein mittelst der Substitution

$$y = e^{\alpha x} z$$

und erhalte hiedurch die Gleichung:

$$n z'' + (m + x + n\alpha) z' + A z = 0 \quad (96)$$

Nun führe ich weiter für x eine neue Variable ξ in Rechnung ein mittelst der Substitution:

$$m + x + n\alpha = \lambda \xi$$

woselbst λ eine, einstweilen noch unbestimmte Constante bezeichnet. Durch Differenziren dieser Gleichung erhält man:

$$dx = \lambda d\xi$$

Da nun

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{dz}{d\xi}$$

$$z'' = \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2 z}{d\xi^2}$$

ist, so hat man durch Einführung dieser Werthe in (96)

$$n \frac{d^2 z}{d\xi^2} + \lambda^2 \xi \frac{dz}{d\xi} + A \lambda^2 z = 0$$

Wählt man nun λ dermassen, dass

$$\lambda^2 = -n$$

ist, so erhält man die Gleichung

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} + A z \quad (97)$$

welche ich nun auf verschiedene Arten behandle, je nachdem nämlich die Zahl A , welche wir stets als reell voraussetzen, eine ganze negative oder eine gebrochene negative Zahl ist.

§. 43.

Ist in der Gleichung

$$\frac{d^2 z}{d \xi^2} = \xi \frac{d z}{d \xi} + A z \quad (97)$$

A eine ganze negative Zahl, so erhält man durch $-A$ maliges Differenzieren der Gleichung (97) die Gleichung:

$$\frac{d^{2-A} z}{d \xi^{2-A}} = \xi \frac{d^{1-A} z}{d \xi^{1-A}}$$

welche für

$$\frac{d^{1-A} z}{d \xi^{1-A}} = Z \quad (98)$$

übergeht in

$$\frac{d Z}{d \xi} = \xi Z \quad (99)$$

und diese Gleichung lässt sich wieder nach der Methode von Laplace behandeln. Setzt man nämlich Z voraus in folgender Gestalt:

$$Z = \int_{u_1}^{u_2} e^{u \xi} V du$$

in welcher V eine einstweilen noch unbekannte Function von u und u_1, u_2 constante Zahlen bezeichnen, so ist:

$$\frac{d Z}{d \xi} = \int_{u_1}^{u_2} u e^{u \xi} V du$$

folglich muss sein:

$$\int_{u_1}^{u_2} u e^{u \xi} V du = \xi \int_{u_1}^{u_2} e^{u \xi} V du \quad (100)$$

Nun gestattet der Ausdruck

$$\xi \int e^{u \xi} V du$$

folgende Schreibweise:

$$\int V \frac{d e^{u \xi}}{d u} du$$

und gibt nach der Methode des theilweisen Integrirens behandelt:

$$e^{u \xi} V - \int e^{u \xi} V' du$$

Setzt man dies in die Gleichung (100) so erhält man:

$$\int_{u_1}^{u_2} u e^{u \xi} V du = \left\{ e^{u \xi} V \right\}_{u_1}^{u_2} - \int_{u_1}^{u_2} e^{u \xi} V' du$$

und dies lässt sich auch so schreiben:

$$\left\{ e^{u\xi} V \right\}_{u_1}^{u_2} - \int_{u_1}^{u_2} e^{u\xi} (V' + uV) du = 0$$

Man leistet dieser Gleichung Genüge, wenn man erstens V so wählt, dass

$$V' + uV = 0$$

d. h. dass

$$V = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

wird, und zweitens, wenn man die Integrationsgrenzen u_1 und u_2 so bestimmt, dass

$$e^{u\xi - \frac{u^2}{2}} = 0$$

wird. Dieser Gleichung genügt man für

$$u = -\infty \quad \text{und} \quad u = +\infty$$

folglich ist das Integrale der Gleichung (99)

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{u\xi - \frac{u^2}{2}} du$$

Setzt man nun für Z seinen in (98) stehenden Werth, so erhält man:

$$\frac{d^{1-A} z}{d\xi^{1-A}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{u\xi - \frac{u^2}{2}} du \quad (101)$$

integriert man nun beiderseits $1 - A$ mal, so erhält man:

$$z = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2\xi^2}{2!} - \frac{u^3\xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{-A}\xi^{-A}}{(-A)!}}{u^{1-A}} + \right. \\ \left. + \varphi_1(u) + \xi\varphi_2(u) + \xi^2\varphi_3(u) + \dots + \xi^{-A}\varphi_{1-A}(u) \right] du \quad (102)$$

denn dieser Ausdruck führt, $1 - A$ mal nach ξ differenzirt, wieder auf die Gleichung (101) zurück, aus der er durch Integration hervorging,

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \varphi_3(u) \quad \dots \quad \varphi_{1-A}(u)$$

sind willkürliche Functionen von u .

§. 44.

Der in (102) gewonnene Ausdruck für z soll aber nicht bloß der Gleichung (101) genügen, sondern vielmehr der Gleichung

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} + Az \quad (97)$$

dies beschränkt die Willkürlichkeit der mit

$$\varphi_1(u), \varphi_2(u), \varphi_3(u) \dots \varphi_{1-A}(u)$$

bezeichneten Functionen, wie sogleich gezeigt werden soll.

Substituirt man nämlich den in (102) stehenden Werth von z in die Gleichung (97), so erhält man, da

$$\frac{dz}{d\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2\xi^2}{2!} - \frac{u^3\xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{-A-1}\xi^{-A-1}}{(-A-1)!}}{u^{-A}} + \right. \\ \left. + \varphi_2(u) + 2\xi\varphi_3(u) + 3\xi^2\varphi_4(u) + \dots - A\xi^{-A-1}\varphi_{1-A}(u) \right] du$$

ferner:

$$\frac{d^2z}{d\xi^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2\xi^2}{2!} - \frac{u^3\xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{-A-2}\xi^{-A-2}}{(-A-2)!}}{u^{-A-1}} + \right. \\ \left. + 1.2\varphi_3(u) + 2.3\xi\varphi_4(u) + 3.4\xi^2\varphi_5(u) + \dots + A(A+1)\xi^{-A-2}\varphi_{1-A}(u) \right] du$$

ist, für den Ausdruck

$$\frac{d^2z}{d\xi^2} - \xi \frac{dz}{d\xi} - Az$$

folgenden Werth:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left\{ \frac{e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2\xi^2}{2!} - \frac{u^3\xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{-A-2}\xi^{-A-2}}{(-A-2)!}}{u^{-A-1}} - \right. \\ - \xi \cdot \frac{e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2\xi^2}{2!} - \frac{u^3\xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{-A-1}\xi^{-A-1}}{(-A-1)!}}{u^{-A}} - \\ - A \cdot \frac{e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2\xi^2}{2!} - \frac{u^3\xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{-A}\xi^{-A}}{(-A)!}}{u^{1-A}} + \\ + 1.2\varphi_3(u) - A\varphi_1(u) + \\ + \xi [2.3\varphi_4(u) - (A+1)\varphi_2(u)] + \\ + \xi^2 [3.4\varphi_5(u) - (A+2)\varphi_3(u)] + \\ + \xi^3 [4.5\varphi_6(u) - (A+3)\varphi_4(u)] + \\ + \dots \\ + \xi^{-A-3} [(A+1)(A+2)\varphi_{-A}(u) + 3\varphi_{-A-2}(u)] + \\ + \xi^{-A-2} [A(A+1)\varphi_{1-A}(u) + 2\varphi_{-A-1}(u)] + \\ \left. + \xi^{-A-1}\varphi_{-A}(u) \right\} du \quad (103)$$

Soll nun diese Gleichung identisch stattfinden, so muss sein:

$$\begin{aligned}
 1.2 \varphi_3(u) &= A \varphi_1(u) \\
 2.3 \varphi_4(u) &= (A+1) \varphi_2(u) \\
 3.4 \varphi_5(u) &= (A+2) \varphi_3(u) \\
 4.5 \varphi_6(u) &= (A+3) \varphi_4(u) \\
 &\vdots \\
 (A+1)(A+2) \varphi_{-A}(u) &= -3 \varphi_{-A-2}(u) \\
 A(A+1) \varphi_{1-A}(u) &= -2 \varphi_{-A-1}(u) \\
 \varphi_{-A}(u) &= -\frac{1}{(-A-1)!}
 \end{aligned} \tag{105}$$

und diese $-A$ Gleichungen dienen zur Bestimmung von

$$\varphi_1(u), \varphi_2(u), \varphi_3(u) \dots \varphi_{-A}(u)$$

§. 45.

Die letzte Gleichung des Gleichungssystems (105) lautet

$$\varphi_{-A}(u) = -\frac{1}{(-A-1)!}$$

aus dieser Gleichung und der vorvorletzten des Systems (105) folgt:

$$\varphi_{-A-2}(u) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(-A-3)!}$$

aus dieser Gleichung und der fünften Gleichung von der letzten des Systems (105) gerechnet, ergibt sich

$$\varphi_{-A-4}(u) = -\frac{1}{3.5} \cdot \frac{1}{(-A-5)!}$$

und so fort.

Ferner erhält man aus der vorletzten Gleichung des Systems (105)

$$\varphi_{-A-1}(u) = -\frac{1}{2} \cdot A(A+1) \varphi_{1-A}(u)$$

aus dieser und der drittvorletzten Gleichung des Systems (105) ergibt sich

$$\varphi_{-A-3}(u) = \frac{1}{2.4} A(A+1)(A+2)(A+3) \varphi_{1-A}(u)$$

und so erhält man weiter:

$$\varphi_{-A-5}(u) = -\frac{1}{2.4.6} A(A+1)(A+2)(A+3)(A+4)(A+5) \varphi_{1-A}(u)$$

demnach ist:

$$\begin{aligned}
 z &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left\{ \frac{e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2 \xi^2}{2!} - \frac{u^3 \xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{-A} \xi^{-A}}{(-A)!}}{u^{1-A}} - \right. \\
 &\quad - \frac{\xi^{-A-1}}{(-A-1)!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\xi^{-A-3}}{(-A-3)!} - \frac{1}{3.5} \cdot \frac{\xi^{-A-5}}{(-A-5)!} + \frac{1}{3.5.7} \cdot \frac{\xi^{-A-7}}{(-A-7)!} - \dots \\
 &\quad + \varphi_{1-A}(u) \left[\xi^{-A} - A(A+1) \frac{\xi^{-A-2}}{2} + A(A+1)(A+2)(A+3) \cdot \frac{\xi^{-A-4}}{2.4} - \right. \\
 &\quad \left. \left. - A(A+1)(A+2)(A+3)(A+4)(A+5) \cdot \frac{\xi^{-A-6}}{2.4.6} + \dots \right] \right\} du
 \end{aligned} \tag{106}$$

Dieser Werth von z gibt, in die Gleichung

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} - \xi \frac{dz}{d\xi} - Az = 0 \quad (97)$$

substituiert, das Resultat:

$$= e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \frac{e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2 \xi^2}{2!} - \frac{u^3 \xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{-A-1} \xi^{-A-1}}{(-A-1)!}}{u^{-A}} \quad (104)$$

nur muss noch hierin $u = -\infty$ und $u = +\infty$ gesetzt, und die Substitutionsresultate von einander abgezogen werden. Nun verschwindet der in (104)

stehende Ausdruck des Factors $e^{-\frac{u^2}{2}}$ halber, sowohl für $u = -\infty$, als auch für $u = +\infty$; es ist daher der in (106) stehende Werth von z das Integrale der Gleichung (97). In diesem Integrale bedeutet $\varphi_{1-A}(u)$ eine willkürliche Function von u . Setzt man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \varphi_{1-A}(u) du$$

gleich einer willkürlichen Constanten, so kann man das Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} + A\xi \quad (97)$$

in dem Falle, in welchem A eine ganze negative Zahl ist, auf folgende Weise schreiben:

$$z = C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2 \xi^2}{2!} - \frac{u^3 \xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{-A} \xi^{-A}}{(-A)!}}{u^{1-A}} - \right. \\ \left. - \frac{\xi^{-A-1}}{(-A-1)!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\xi^{-A-3}}{(-A-3)!} - \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \frac{\xi^{-A-5}}{(-A-5)!} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{\xi^{-A-7}}{(-A-7)!} - \dots \right] du + \\ + C_2 \left[\xi^{-A} - \frac{A(A+1)}{2} \cdot \xi^{-A-2} + \frac{A(A+1)(A+2)(A+3)}{2 \cdot 4} \xi^{-A-4} - \right. \\ \left. - \frac{A(A+1)(A+2)(A+3)(A+4)(A+5)}{2 \cdot 4 \cdot 6} \xi^{-A-6} + \dots \right]$$

und in diesem Integrale bezeichnen C_1 und C_2 willkürliche Constante.

Das mit C_2 multiplicirte particuläre Integrale kann auch so geschrieben werden:

$$\frac{\xi^{-A}}{(-A)!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi^{-A-2}}{(-A-2)!} + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\xi^{-A-4}}{(-A-4)!} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\xi^{-A-6}}{(-A-6)!} + \dots$$

folglich ist das vollständige Integrale der Gleichung (97) in dem Falle, in welchem A eine ganze negative Zahl ist:

$$\begin{aligned}
 z = C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} & \left[\frac{e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2 \xi^2}{2!} - \frac{u^3 \xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{-A} \xi^{-A}}{(-A)!}}{u^{1-A}} - \right. \\
 & \left. - \frac{\xi^{-A-1}}{(-A-1)!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\xi^{-A-3}}{(-A-3)!} - \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \frac{\xi^{-A-5}}{(-A-5)!} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{\xi^{-A-7}}{(-A-7)!} - \dots \right] du + \\
 & + C_2 \left[\frac{\xi^{-A}}{(-A)!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi^{-A-2}}{(-A-2)!} + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\xi^{-A-4}}{(-A-4)!} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\xi^{-A-6}}{(-A-6)!} + \dots \right]
 \end{aligned} \quad (107)$$

§. 46.

So genügt z. B. der Gleichung

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} - z$$

für welche $A = -1$ ist, folgender Werth von z

$$z = C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{e^{u\xi} - 1 - u\xi}{u^2} - 1 \right] du + C_2 \xi$$

ferner genügt der Gleichung:

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} - 2z$$

für welche $A = -2$ ist, der nachstehende Werth von z

$$z = C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2 \xi^2}{2!}}{u^3} - \xi \right] du + C_2 (\xi^2 - 1)$$

Nehmen wir noch die Gleichung

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} - 3z$$

für selbe ist $A = -3$ und ihr genügt:

$$z = C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2 \xi^2}{2!} - \frac{u^3 \xi^3}{3!}}{u^4} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{1}{3} \right] du + C_2 (\xi^3 - 3\xi)$$

in allen so eben aufgeschriebenen Gleichungen bedeuten C_1 und C_2 willkürliche Constante.

Anmerkung. Da in dem Falle, in welchem A eine ganze negative Zahl ist, stets ein particuläres Integrale in der Form eines ganzen algebraischen Polynoms auftritt, so lässt sich das zweite particuläre Integrale auch sehr einfach mittelst der Methode der Variation der willkürlichen Constanten bestimmen. Bekanntlich ist, wenn ein particuläres Integrale der linearen Differentialgleichung

$$X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y = 0$$

$y = y_1$ ist, das vollständige Integrale gegeben durch

$$y = y_1 \int z \, dx$$

woselbst das z nachstehenden Werth hat:

$$z = \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int \frac{X_1 \, dx}{X_2}}$$

in den obigen drei Beispielen sind sonach der Reihe nach

$$z = \xi \int e^{\frac{\xi^2}{2}} \cdot \frac{d\xi}{\xi^2}$$

$$z = (\xi^2 - 1) \int e^{\frac{\xi^2}{2}} \cdot \frac{d\xi}{(\xi^2 - 1)^2}$$

$$z = (\xi^3 - 3\xi) \int e^{\frac{\xi^2}{2}} \cdot \frac{d\xi}{(\xi^3 - 3\xi)^2}$$

die vollständigen Integrale der drei daselbst behandelten Differentialgleichungen.

§. 47.

Integriren wir jetzt die Gleichung

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} + Az \quad (97)$$

für den Fall, in welchem A eine negative und gebrochene Zahl ist.

In diesem Falle differenzire ich die Gleichung (97) μ mal nach x , unter μ eine ganze positive Zahl verstanden, und erhalte hiedurch:

$$\frac{d^{\mu+2} z}{d\xi^{\mu+2}} = \xi \frac{d^{\mu+1} z}{d\xi^{\mu+1}} + (\mu + A) \frac{d^\mu z}{d\xi^\mu} \quad (108)$$

Nun wähle ich μ so, dass $A + \mu$ ein positiver echter Bruch wird.

Die Gleichung (108) gibt, nach der Laplace'schen Methode behandelt, $\frac{d^\mu z}{d\xi^\mu}$, und zwar erhält man dies, wenn man in die Formel (91) setzt:

statt m	die Zahl	0
" n	" "	-1
" A	" "	$A + \mu$
" α	" "	0
" y	" Variable	$\frac{d^\mu z}{d\xi^\mu}$
" x	" "	ξ

es ist sodann:

$$\frac{d^\mu z}{d\xi^\mu} = C_1 \int_0^{+\infty} u^{A+\mu-1} e^{u\xi - \frac{u^2}{2}} du + C_2 \int_0^{-\infty} u^{A+\mu-1} e^{u\xi - \frac{u^2}{2}} du$$

was wir kurz so schreiben wollen:

$$\frac{d^\mu z}{d\xi^\mu} = \int_0^{\pm\infty} u^{A+\mu-1} e^{u\xi - \frac{u^2}{2}} du \quad (109)$$

Integrirt man beiderseits μ mal, so erhält man:

$$z = \int_0^{\pm\infty} u^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2 \xi^2}{2!} - \frac{u^3 \xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{\mu-1} \xi^{\mu-1}}{(\mu-1)!} + \right. \\ \left. + \varphi_1(u) + \xi \varphi_2(u) + \xi^2 \varphi_3(u) + \dots + \xi^{\mu-1} \varphi_\mu(u) \right] du \quad (110)$$

denn diese Gleichung führt, μ mal differenzirt, wieder auf die Gleichung (109) zurück, aus welcher sie durch Integration hervorging; $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $\varphi_3(u)$... $\varphi_\mu(u)$ bezeichnen willkürliche Functionen von u .

Der in der Gleichung (110) gewonnene Werth von z soll aber nicht blos der Gleichung (109) genügen, sondern er soll genügen der Gleichung

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} + Az \quad (97)$$

Dies beschränkt die Willkürlichkeit der mit $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $\varphi_3(u)$... $\varphi_\mu(u)$ bezeichneten Functionen von u , wie sogleich dargethan werden soll.

Zu diesem Zwecke ist es nöthig, $\frac{dz}{d\xi}$ und $\frac{d^2 z}{d\xi^2}$ zu bestimmen. Es ist:

$$\frac{dz}{d\xi} = \int_0^{\pm\infty} u^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[u \left(e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2 \xi^2}{2!} - \frac{u^3 \xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{\mu-2} \xi^{\mu-2}}{(\mu-2)!} \right) + \right. \\ \left. + \varphi_2(u) + 2\xi \varphi_3(u) + 3\xi^2 \varphi_4(u) + \dots + (\mu-1) \xi^{\mu-2} \varphi_\mu(u) \right] du$$

und

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \int_0^{\pm\infty} u^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[u^2 \left(e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2 \xi^2}{2!} - \frac{u^3 \xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{\mu-3} \xi^{\mu-3}}{(\mu-3)!} \right) + \right. \\ \left. + 1.2 \varphi_3(u) + 2.3 \xi \varphi_4(u) + 3.4 \xi^2 \varphi_5(u) + \dots + (\mu-2)(\mu-1) \xi^{\mu-3} \varphi_\mu(u) \right] du$$

folglich hat man:

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} - \xi \frac{dz}{d\xi} - Az = \\ \int_0^{\pm\infty} u^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \left\{ u^2 \left(e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2 \xi^2}{2!} - \frac{u^3 \xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{\mu-3} \xi^{\mu-3}}{(\mu-3)!} \right) - \right. \\ \left. - \xi u \left(e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2 \xi^2}{2!} - \frac{u^3 \xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{\mu-2} \xi^{\mu-2}}{(\mu-2)!} \right) - \right. \\ \left. - A \left(e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2 \xi^2}{2!} - \frac{u^3 \xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{\mu-1} \xi^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \right) + \right.$$

$$u^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

und lässt man die sich auf beiden Seiten der Gleichung aufhebenden Glieder weg, so erhält man:

$$\begin{aligned} & 1.2\varphi_3(u) - A\varphi_1(u) + \\ & + \xi [2.3\varphi_4(u) - (A+1)\varphi_2(u)] + \\ & + \xi^2 [3.4\varphi_5(u) - (A+2)\varphi_3(u)] + \\ & + \xi^3 [4.5\varphi_6(u) - (A+3)\varphi_4(u)] + \\ & + \dots \\ & + \xi^{\mu-4} [(\mu-3)(\mu-2)\varphi_{\mu-1}(u) - (A+\mu-4)\varphi_{\mu-3}(u)] + \\ & + \xi^{\mu-3} [(\mu-2)(\mu-1)\varphi_{\mu}(u) - (A+\mu-3)\varphi_{\mu-2}(u)] + \\ & + (A+\mu-2)\xi^{\mu-2}\varphi_{\mu-1}(u) - \\ & - (A+\mu-1)\xi^{\mu-1}\varphi_{\mu}(u) = -\frac{u^{\mu}\xi^{\mu-2}}{(\mu-2)!} - \frac{u^{\mu+1}\xi^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \end{aligned}$$

und aus dieser Gleichung, welche für jeden Werth von ξ stattfinden soll, gehen nachstehende Gleichungen hervor:

$$\begin{aligned} 1.2\varphi_3(u) &= A\varphi_1(u) \\ 2.3\varphi_4(u) &= (A+1)\varphi_2(u) \\ 3.4\varphi_5(u) &= (A+2)\varphi_3(u) \\ 4.5\varphi_6(u) &= (A+3)\varphi_4(u) \\ &\dots \\ (\mu-3)(\mu-2)\varphi_{\mu-1}(u) &= (A+\mu-4)\varphi_{\mu-3}(u) \\ (\mu-2)(\mu-1)\varphi_{\mu}(u) &= (A+\mu-3)\varphi_{\mu-2}(u) \\ (A+\mu-2)\varphi_{\mu-1}(u) &= \frac{u^{\mu}}{(\mu-2)!} \\ (A+\mu-1)\varphi_{\mu}(u) &= \frac{u^{\mu+1}}{(\mu-1)!} \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu}(u) &= \frac{u^{\mu+1}}{(A+\mu-1)(\mu-1)!} \\ \varphi_{\mu-1}(u) &= \frac{u^{\mu}}{(A+\mu-2)(\mu-2)!} \\ \varphi_{\mu-2}(u) &= \frac{u^{\mu+1}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3)(\mu-3)!} \\ \varphi_{\mu-3}(u) &= \frac{u^{\mu}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4)(\mu-4)!} \\ \varphi_{\mu-4}(u) &= \frac{u^{\mu+1}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3)(A+\mu-5)(\mu-5)!} \\ \varphi_{\mu-5}(u) &= \frac{u^{\mu}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4)(A+\mu-6)(\mu-6)!} \\ &\dots \end{aligned} \tag{113}$$

Der in (112) stehende Ausdruck lässt sich auch so schreiben:

$$-e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{u^{A+\mu}\xi^{\mu}}{\mu!} + \frac{u^{A+\mu+1}\xi^{\mu+1}}{(\mu+1)!} + \frac{u^{A+\mu+2}\xi^{\mu+2}}{(\mu+2)!} + \dots \right]$$

und in dieser Form ist ersichtlich, dass er Null wird, sowohl für

$$u = 0 \quad \text{als auch für} \quad u = \pm \infty$$

folglich ist wirklich der in (110) stehende Werth von z das Integrale der Gleichung (97), unter der Voraussetzung, dass $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $\varphi_3(u) \dots \varphi_\mu(u)$ die in (113) angegebenen Bedeutungen haben.

§. 48.

Recapituliren wir das in den Paragraphen 41 bis 47 Gefundene, so hat man:

Ist zu integrieren die Differentialgleichung:

$$n y'' + (m + x - n\alpha) y' + [A - \alpha(m + x)] y = 0 \quad (89)$$

in welcher m , n , A und α beliebige constante Zahlen bezeichnen, so setze man

$$y = e^{\alpha x} z$$

woselbst z eine neue Variable bezeichnet, man erhält dann:

$$n z'' + (m + x + n\alpha) z' + A z = 0 \quad (96)$$

In diese Gleichung führe man für x eine neue Variable ξ ein mittelst der Substitution:

$$m + x + n\alpha = \xi \sqrt{-n}$$

man kömmt hiedurch zu der Gleichung:

$$\frac{d^2 z}{d \xi^2} = \xi \frac{d z}{d \xi} + A z \quad (97)$$

und diese hat verschieden geformte Integrale, je nachdem A eine positive oder eine negative, eine ganze oder eine gebrochene Zahl ist. Ist erstens A eine positive Zahl, so erhält man das Integrale der Gleichung (97) aus der Formel (92), wenn man in selbe setzt:

für m die Zahl 0, ferner

„ n „ „ — 1

„ α „ „ 0

„ y „ Variable z

„ x „ „ ξ

man erhält nämlich alsdann:

$$z = \int_0^\infty \lambda^{A-1} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} (C_1 e^{+\lambda \xi} + C_2 e^{-\lambda \xi}) d\lambda \quad (114)$$

ist A ganz und positiv, so gestattet dieses Integrale folgende Schreibweise:

$$z = \frac{d^{A-1}}{d \xi^{A-1}} \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda^2}{2}} (C_1 e^{+\lambda \xi} + C_2 e^{-\lambda \xi}) d\lambda$$

Ist zweitens A eine ganze negative Zahl, so ist:

$$z = C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2 \xi^2}{2!} - \frac{u^3 \xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{-A} \xi^{-A}}{(-A)!}}{u^{1-A}} - \right. \quad (107)$$

$$\left. - \frac{\xi^{-A-1}}{(-A-1)!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\xi^{-A-3}}{(-A-3)!} - \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \frac{\xi^{-A-5}}{(-A-5)!} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{\xi^{-A-7}}{(-A-7)!} - \dots \right] du +$$

$$+ C_2 \left[\frac{\xi^{-A}}{(-A)!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi^{-A-2}}{(-A-2)!} + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\xi^{-A-4}}{(-A-4)!} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\xi^{-A-6}}{(-A-6)!} + \dots \right]$$

das vollständige Integrale der Gleichung (97); ist endlich drittens A eine gebrochene negative Zahl, so wähle man eine ganze positive Zahl μ dermassen, dass $A + \mu$ ein positiver echter Bruch wird, dann hat man für z folgenden Werth:

$$z = C_1 \int_0^{+\infty} u^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2 \xi^2}{2!} - \frac{u^3 \xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{\mu-1} \xi^{\mu-1}}{(\mu-1)!} + \right.$$

$$+ u^{\mu+1} \left(\frac{\xi^{\mu-1}}{(A+\mu-1) \cdot (\mu-1)!} + \frac{\xi^{\mu-3}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3) \cdot (\mu-3)!} + \right.$$

$$\left. + \frac{\xi^{\mu-5}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3)(A+\mu-5) \cdot (\mu-5)!} + \dots \right) +$$

$$+ u^{\mu} \left(\frac{\xi^{\mu-2}}{(A+\mu-2) \cdot (\mu-2)!} + \frac{\xi^{\mu-4}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4) \cdot (\mu-4)!} + \right.$$

$$\left. + \frac{\xi^{\mu-6}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4)(A+\mu-6) \cdot (\mu-6)!} + \dots \right) \Big] du +$$

$$+ C_2 \int_0^{-\infty} u^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2 \xi^2}{2!} - \frac{u^3 \xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{\mu-1} \xi^{\mu-1}}{(\mu-1)!} + \right. \quad (115)$$

$$+ u^{\mu+1} \left(\frac{\xi^{\mu-1}}{(A+\mu-1) \cdot (\mu-1)!} + \frac{\xi^{\mu-3}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3) \cdot (\mu-3)!} + \right.$$

$$+ \frac{\xi^{\mu-5}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3)(A+\mu-5) \cdot (\mu-5)!} + \dots \Big) +$$

$$+ u^{\mu} \left(\frac{\xi^{\mu-2}}{(A+\mu-2) \cdot (\mu-2)!} + \frac{\xi^{\mu-4}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4) \cdot (\mu-4)!} + \right.$$

$$\left. + \frac{\xi^{\mu-6}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4)(A+\mu-6) \cdot (\mu-6)!} + \dots \right) \Big] du$$

in all' diesen Fällen bedeuten C_1 und C_2 willkürliche Constante.

§. 49.

So ist z. B. das Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} - \frac{1}{2} z$$

in welcher $A = -\frac{1}{2}$ ist, und daher $\mu = 1$ angenommen werden muss:

$$z = C_1 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{e^{u\xi} - 1}{u\sqrt{u}} - 2\sqrt{u} \right] du + C_2 \int_0^{-\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{e^{u\xi} - 1}{u\sqrt{u}} - 2\sqrt{u} \right] du$$

so ist ferner das Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} - \frac{3}{2} z$$

in welcher $A = -\frac{3}{2}$ und somit $\mu = 2$ ist, folgendes:

$$z = C_1 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{e^{u\xi} - 1 - u\xi}{u^2\sqrt{u}} - \frac{6u\xi + 2}{3\sqrt{u}} \right] du + \\ + C_2 \int_0^{-\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{e^{u\xi} - 1 - u\xi}{u^2\sqrt{u}} - \frac{6u\xi + 2}{3\sqrt{u}} \right] du$$

§. 50.

Die im vorletzten § zusammengestellten Integrale der Gleichung (97) lassen sich leicht in unendliche, convergente Reihen entwickeln, und diese unendlichen Reihen leisten ebenfalls der Gleichung (97) Genüge.

Betrachten wir zuerst den in (114) für positive Werthe von A giltigen Werth von z ; dieser ist:

$$z = \int_0^{\infty} \lambda^{A-1} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} (C_1 e^{+\lambda\xi} + C_2 e^{-\lambda\xi}) d\lambda \quad (114)$$

Schreibt man für die Exponentialgrößen $e^{+\lambda\xi}$ und $e^{-\lambda\xi}$ ihre Werthe in Reihenform, so hat man:

$$z = C_1 \int_0^{\infty} \lambda^{A-1} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \left[1 + \lambda\xi + \frac{\lambda^2 \xi^2}{2!} + \frac{\lambda^3 \xi^3}{3!} + \frac{\lambda^4 \xi^4}{4!} + \frac{\lambda^5 \xi^5}{5!} + \dots \right] d\lambda + \\ + C_2 \int_0^{\infty} \lambda^{A-1} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \left[1 - \lambda\xi + \frac{\lambda^2 \xi^2}{2!} - \frac{\lambda^3 \xi^3}{3!} + \frac{\lambda^4 \xi^4}{4!} - \frac{\lambda^5 \xi^5}{5!} + \dots \right] d\lambda$$

und dieses kann man auch so schreiben:

$$z = (C_1 + C_2) \int_0^{\infty} \lambda^{A-1} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \left[1 + \frac{\lambda^2 \xi^2}{2!} + \frac{\lambda^4 \xi^4}{4!} + \frac{\lambda^6 \xi^6}{6!} + \dots \right] d\lambda + \\ + (C_1 - C_2) \int_0^{\infty} \lambda^{A-1} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \left[\lambda\xi + \frac{\lambda^3 \xi^3}{3!} + \frac{\lambda^5 \xi^5}{5!} + \frac{\lambda^7 \xi^7}{7!} + \dots \right] d\lambda \quad (116)$$

Nun ist bekanntlich

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx \quad a > 0$$

Setzt man hierin

$$x = \frac{\lambda^2}{2} \quad a = \frac{m+1}{2}$$

so erhält man:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \lambda^m d\lambda = 2^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \quad m+1 > 0$$

und durch dies geht die Gleichung (116) über in:

$$\begin{aligned} z = (C_1 + C_2) & \left[2^{\frac{A}{2}-1} \Gamma\left(\frac{A}{2}\right) + \frac{\xi^2}{2!} \cdot 2^{\frac{A}{2}} \Gamma\left(\frac{A}{2} + 1\right) + \right. \\ & \left. + \frac{\xi^4}{4!} \cdot 2^{\frac{A}{2}+1} \Gamma\left(\frac{A}{2} + 2\right) + \dots \right] + \\ & + (C_1 - C_2) \left[2^{\frac{A-1}{2}} \Gamma\left(\frac{A+1}{2}\right) \cdot \xi + 2^{\frac{A+1}{2}} \Gamma\left(\frac{A+3}{2}\right) \cdot \frac{\xi^3}{3!} + \right. \\ & \left. + 2^{\frac{A+3}{2}} \Gamma\left(\frac{A+5}{2}\right) \cdot \frac{\xi^5}{5!} + \dots \right] \end{aligned}$$

Beachtet man nun noch die Gleichung:

$$\Gamma(A+n) = A(A+1)(A+2)\dots(A+n-1)\Gamma(A) \quad A > 0 \quad (22)$$

und führt man statt den willkürlichen Constanten C_1 und C_2 neue willkürliche Constante B_1 und B_2 in Rechnung, indem man:

$$(C_1 + C_2) \cdot 2^{\frac{A}{2}-1} \Gamma\left(\frac{A}{2}\right) = B_1$$

$$(C_1 - C_2) \cdot 2^{\frac{A-1}{2}} \Gamma\left(\frac{A+1}{2}\right) = B_2$$

setzt, so erhält man für z folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} z = B_1 & \left[1 + A \cdot \frac{\xi^2}{2!} + A(A+2) \cdot \frac{\xi^4}{4!} + A(A+2)(A+4) \cdot \frac{\xi^6}{6!} + \dots \right] + \\ & + B_2 \left[\xi + (A+1) \frac{\xi^3}{3!} + (A+1)(A+3) \cdot \frac{\xi^5}{5!} + (A+1)(A+3)(A+5) \cdot \frac{\xi^7}{7!} + \dots \right] \quad (117) \end{aligned}$$

Die beiden Reihen sind, wie man sieht, für jeden Werth von ξ convergent, und jede der beiden in den eckigen Klammern stehenden Reihen leisten für sich der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} - \xi \frac{dz}{d\xi} - Az = 0 \quad (97)$$

Genüge. Denn man erhält aus der Gleichung

$$z = 1 + A \cdot \frac{\xi^2}{2!} + A(A+2) \frac{\xi^4}{4!} + A(A+2)(A+4) \frac{\xi^6}{6!} + \dots$$

durch Differenziren folgende Werthe für $\frac{dz}{d\xi}$ und $\frac{d^2 z}{d\xi^2}$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\xi} &= A\xi + A(A+2) \frac{\xi^3}{3!} + A(A+2)(A+4) \frac{\xi^5}{5!} + \dots \\ \frac{d^2 z}{d\xi^2} &= A + A(A+2) \frac{\xi^2}{2!} + A(A+2)(A+4) \frac{\xi^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

folglich ist:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{d\xi^2} - \xi \frac{dz}{d\xi} - Az = \\ = A + A(A+2) \cdot \frac{\xi^2}{2!} + A(A+2)(A+4) \frac{\xi^4}{4!} + A(A+2)(A+4)(A+6) \cdot \frac{\xi^6}{6!} + \dots \\ - A\xi^2 \quad - A(A+2) \cdot \frac{\xi^4}{3!} \quad - A(A+2)(A+4) \cdot \frac{\xi^6}{5!} - \dots \\ - A \quad - A^2 \cdot \frac{\xi^2}{2!} \quad - A^2(A+2) \cdot \frac{\xi^4}{4!} \quad - A^2(A+2)(A+4) \cdot \frac{\xi^6}{6!} - \dots \end{aligned}$$

was identisch Null ist.

Eben so folgt aus:

$$z = \xi + (A+1) \frac{\xi^3}{3!} + (A+1)(A+3) \frac{\xi^5}{5!} + (A+1)(A+3)(A+5) \cdot \frac{\xi^7}{7!} + \dots$$

für $\frac{dz}{d\xi}$ und $\frac{d^2 z}{d\xi^2}$ nachstehendes:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\xi} &= 1 + (A+1) \frac{\xi^2}{2!} + (A+1)(A+3) \frac{\xi^4}{4!} + (A+1)(A+3)(A+5) \frac{\xi^6}{6!} + \dots \\ \frac{d^2 z}{d\xi^2} &= (A+1)\xi + (A+1)(A+3) \cdot \frac{\xi^3}{3!} + (A+1)(A+3)(A+5) \cdot \frac{\xi^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

demnach ist:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{d\xi^2} - \xi \frac{dz}{d\xi} - Az = (A+1)\xi + (A+1)(A+3) \frac{\xi^3}{3!} + (A+1)(A+3)(A+5) \cdot \frac{\xi^5}{5!} + \dots \\ - \xi \quad - (A+1) \cdot \frac{\xi^3}{2!} \quad - (A+1)(A+3) \cdot \frac{\xi^5}{4!} - \dots \\ - A\xi \quad - A(A+1) \cdot \frac{\xi^3}{3!} \quad - A(A+1)(A+3) \cdot \frac{\xi^5}{5!} - \dots \end{aligned}$$

was gleichfalls identisch Null ist.

Man kann daher, im Falle A positiv ist, das vollständige Integrale der Gleichung (97) in der Form aufstellen, die in (117) angeführt ist.

§. 51.

Betrachten wir nun das in (107) stehende Integrale der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} + Az \quad (97)$$

welches giltig ist in dem Falle, in welchem A eine ganze negative Zahl ist. Dieses Integrale lautet:

$$\begin{aligned} z = C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2 \xi^2}{2!} - \frac{u^3 \xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{-A} \xi^{-A}}{(-A)!}}{u^{1-A}} - \right. \\ \left. - \frac{\xi^{-A-1}}{(-A-1)!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\xi^{-A-3}}{(-A-3)!} - \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \frac{\xi^{-A-5}}{(-A-5)!} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{\xi^{-A-7}}{(-A-7)!} - \dots \right] du + \\ + C_2 \left[\frac{\xi^{-A}}{(-A)!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi^{-A-2}}{(-A-2)!} + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\xi^{-A-4}}{(-A-4)!} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\xi^{-A-6}}{(-A-6)!} + \dots \right] \end{aligned} \quad (107)$$

Betrachten wir vorerst das mit der Constanten C_1 verbundene particuläre Integrale, und setzen wir für die Exponentialgrösse $e^{u\xi}$ ihren Werth

$$1 + u\xi + \frac{u^2 \xi^2}{2!} + \frac{u^3 \xi^3}{3!} + \frac{u^4 \xi^4}{4!} + \dots$$

so gestattet das z folgende Schreibweise:

$$z = C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{\xi^{-A+1}}{(-A+1)!} + \frac{u \xi^{-A+2}}{(-A+2)!} + \frac{u^2 \xi^{-A+3}}{(-A+3)!} + \frac{u^3 \xi^{-A+4}}{(-A+4)!} + \dots \right. \\ \left. - \frac{\xi^{-A-1}}{(-A-1)!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\xi^{-A-3}}{(-A-3)!} - \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \frac{\xi^{-A-5}}{(-A-5)!} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{\xi^{-A-7}}{(-A-7)!} - \dots \right] du$$

Die in der ersten Zeile dieses Ausdruckes stehenden, mit ungeraden Potenzen von u multiplicirten Glieder verschwinden, weil

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot u^{2n+1} du = 0$$

ist; ferner hat man *)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot u^{2n} du = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n-1) \sqrt{2\pi}$$

*) Bekanntlich ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Setzt man

$$x = u \sqrt{\theta}$$

unter θ eine positive Zahl verstanden, so ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}}$$

Differenzirt man diese Gleichung n mal nach θ , so erhält man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^{2n} e^{-\theta u^2} du = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)}{2^n \cdot \theta^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\pi}$$

und setzt man hierin $\theta = \frac{1}{2}$, so erhält man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^{2n} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n-1)$$

folglich erhält man, durchgehends den Factor $C_1 \sqrt{2\pi}$ ausser Acht lassend:

$$z = \frac{\xi^{-A+1}}{(-A+1)!} + \frac{\xi^{-A+3}}{(-A+3)!} + 1.3. \frac{\xi^{-A+5}}{(-A+5)!} + 1.3.5. \frac{\xi^{-A+7}}{(-A+7)!} + \dots$$

$$- \frac{\xi^{-A-1}}{(-A-1)!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\xi^{-A-3}}{(-A-3)!} - \frac{1}{3.5} \cdot \frac{\xi^{-A-5}}{(-A-5)!} + \frac{1}{3.5.7} \cdot \frac{\xi^{-A-7}}{(-A-7)!} - \dots$$

oder in besserer Ordnung geschrieben:

$$z = \dots + \frac{1}{3.5.7} \cdot \frac{\xi^{-A-7}}{(-A-7)!} - \frac{1}{3.5} \cdot \frac{\xi^{-A-5}}{(-A-5)!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\xi^{-A-3}}{(-A-3)!} - \frac{\xi^{-A-1}}{(-A-1)!} +$$

$$+ \frac{\xi^{-A+1}}{(-A+1)!} + \frac{\xi^{-A+3}}{(-A+3)!} + 1.3. \frac{\xi^{-A+5}}{(-A+5)!} + 1.3.5. \frac{\xi^{-A+7}}{(-A+7)!} + \dots$$

Es führt somit das in (107) stehende Integrale der Gleichung (97), in Reihen entwickelt, zu nachstehendem Ausdrucke:

$$z = C_1 \left[\dots + \frac{1}{3.5.7} \cdot \frac{\xi^{-A-7}}{(-A-7)!} - \frac{1}{3.5} \cdot \frac{\xi^{-A-5}}{(-A-5)!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\xi^{-A-3}}{(-A-3)!} - \right.$$

$$\left. - \frac{\xi^{-A-1}}{(-A-1)!} + \frac{\xi^{-A+1}}{(-A+1)!} + \frac{\xi^{-A+3}}{(-A+3)!} + 1.3. \frac{\xi^{-A+5}}{(-A+5)!} + 1.3.5. \frac{\xi^{-A+7}}{(-A+7)!} + \dots \right] +$$

$$+ C_2 \left[\frac{\xi^{-A}}{(-A)!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi^{-A-2}}{(-A-2)!} + \frac{1}{2.4} \cdot \frac{\xi^{-A-4}}{(-A-4)!} - \frac{1}{2.4.6} \cdot \frac{\xi^{-A-6}}{(-A-6)!} + \dots \right]$$

und diese Reihen sind merkwürdigerweise ganz übereinstimmend mit jenen Reihen, die wir in (117) gegeben haben, und von denen wir uns überzeugten, dass sie der Gleichung (97) identisch genügen.

§. 52.

Man sieht dies am besten aus Beispielen. Setzen wir z. B. $A = -8$, so hat man zu integrieren die Gleichung:

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} - 8z$$

Ihr Integrale ist vermöge der so eben gegebenen Formel

$$z = C_1 \left[\frac{1}{3.5.7} \xi - \frac{1}{3.5} \cdot \frac{\xi^3}{3!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\xi^5}{5!} - \frac{\xi^7}{7!} + \frac{\xi^9}{9!} + \frac{\xi^{11}}{11!} + 1.3. \frac{\xi^{13}}{13!} + 1.3.5. \frac{\xi^{15}}{15!} + \dots \right] +$$

$$+ C_2 \left[\frac{\xi^8}{8!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi^6}{6!} + \frac{1}{2.4} \cdot \frac{\xi^4}{4!} - \frac{1}{2.4.6} \cdot \frac{\xi^2}{2!} + \frac{1}{2.4.6.8} \right] \quad (118)$$

Würde man dieselbe Gleichung mittelst der Formel (117) integrieren, so fände man:

$$z = B_1 \left[1 - 8 \cdot \frac{\xi^2}{2!} + 8.6 \cdot \frac{\xi^4}{4!} - 8.6.4 \cdot \frac{\xi^6}{6!} + 8.6.4.2 \cdot \frac{\xi^8}{8!} \right] +$$

$$+ B_2 \left[\xi - 7 \cdot \frac{\xi^3}{3!} + 7.5 \cdot \frac{\xi^5}{5!} - 7.5.3 \cdot \frac{\xi^7}{7!} + 7.5.3.1 \cdot \frac{\xi^9}{9!} + \dots \right] \quad (119)$$

und man sieht auf den ersten Blick die Gleichheit der beiden in (118) und (119) stehenden Integrale.

Betrachten wir ferner die Gleichung

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} - 9z \quad (120)$$

für sie ist $A = -9$; die am Schlusse des vorhergehenden §. aufgestellte Reihe führt zu dem Integrale:

$$z = C_1 \left[-\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{\xi^2}{2!} - \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \frac{\xi^4}{4!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\xi^6}{6!} - \frac{\xi^8}{8!} + \right. \\ \left. + \frac{\xi^{10}}{10!} + \frac{\xi^{12}}{12!} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{\xi^{14}}{14!} + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{\xi^{16}}{16!} + \dots \right] + \quad (121)$$

$$+ C_2 \left[\frac{\xi^9}{9!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi^7}{7!} + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\xi^5}{5!} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\xi^3}{3!} + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \xi \right]$$

und die Gleichung (117) führt auf:

$$z = B_1 \left[1 - 9 \cdot \frac{\xi^2}{2!} + 9 \cdot 7 \cdot \frac{\xi^4}{4!} - 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{\xi^6}{6!} + 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{\xi^8}{8!} - \right. \\ \left. - 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{\xi^{10}}{10!} - 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\xi^{12}}{12!} - 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{\xi^{14}}{14!} - \right. \\ \left. - 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{\xi^{16}}{16!} - \dots \right] + \\ + B_2 \left[\xi - 8 \cdot \frac{\xi^3}{3!} + 8 \cdot 6 \cdot \frac{\xi^5}{5!} - 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{\xi^7}{7!} + 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{\xi^9}{9!} \right] \quad (122)$$

woraus man wieder die Gleichheit der beiden Integrale (121) und (122) ersieht.

§. 53.

Die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} + Az \quad (97)$$

hat für negative und gebrochene Werthe von A folgendes Integrale:

$$z = C_1 \int_0^{+\infty} u^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2 \xi^2}{2!} - \frac{u^3 \xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{\mu-1} \xi^{\mu-1}}{(\mu-1)!} + \right. \\ \left. + u^{\mu+1} \left(\frac{\xi^{\mu-1}}{(A+\mu-1) \cdot (\mu-1)!} + \frac{\xi^{\mu-3}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3) \cdot (\mu-3)!} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\xi^{\mu-5}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3)(A+\mu-5) \cdot (\mu-5)!} + \dots \right) + \right. \\ \left. + u^\mu \left(\frac{\xi^{\mu-2}}{(A+\mu-2) \cdot (\mu-2)!} + \frac{\xi^{\mu-4}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4) \cdot (\mu-4)!} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\xi^{\mu-6}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4)(A+\mu-6) \cdot (\mu-6)!} + \dots \right) \right] du + \\ + C_2 \int_0^{-\infty} u^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2 \xi^2}{2!} - \frac{u^3 \xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{\mu-1} \xi^{\mu-1}}{(\mu-1)!} + \right. \\ \left. + u^{\mu+1} \left(\frac{\xi^{\mu-1}}{(A+\mu-1) \cdot (\mu-1)!} + \frac{\xi^{\mu-3}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3) \cdot (\mu-3)!} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\xi^{\mu-5}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3)(A+\mu-5) \cdot (\mu-5)!} + \dots \right) + \right. \\ \left. + u^\mu \left(\frac{\xi^{\mu-2}}{(A+\mu-2) \cdot (\mu-2)!} + \frac{\xi^{\mu-4}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4) \cdot (\mu-4)!} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\xi^{\mu-6}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4)(A+\mu-6) \cdot (\mu-6)!} + \dots \right) \right] du \quad (115)$$

in welchem μ eine solche ganze positive Zahl bezeichnet, welche macht, dass $A + \mu$ ein positiver echter Bruch wird.

Schreibt man für $e^{u\xi}$ die ihr entsprechende unendliche Reihe, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 z = & C_1 \int_0^{+\infty} u^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{u^\mu \xi^\mu}{\mu!} + \frac{u^{\mu+1} \xi^{\mu+1}}{(\mu+1)!} + \frac{u^{\mu+2} \xi^{\mu+2}}{(\mu+2)!} + \dots \right. \\
 & + u^{\mu+1} \left(\frac{\xi^{\mu-1}}{(A+\mu-1) \cdot (\mu-1)!} + \frac{\xi^{\mu-3}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3) \cdot (\mu-3)!} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\xi^{\mu-5}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3)(A+\mu-5) \cdot (\mu-5)!} + \dots \right) + \\
 & + u^\mu \left(\frac{\xi^{\mu-2}}{(A+\mu-2) \cdot (\mu-2)!} + \frac{\xi^{\mu-4}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4) \cdot (\mu-4)!} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\xi^{\mu-6}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4)(A+\mu-6) \cdot (\mu-6)!} + \dots \right) \Big] du + \\
 & + C_2 \int_0^{-\infty} u^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{u^\mu \xi^\mu}{\mu!} + \frac{u^{\mu+1} \xi^{\mu+1}}{(\mu+1)!} + \frac{u^{\mu+2} \xi^{\mu+2}}{(\mu+2)!} + \right. \\
 & + u^{\mu+1} \left(\frac{\xi^{\mu-1}}{(A+\mu-1) \cdot (\mu-1)!} + \frac{\xi^{\mu-3}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3) \cdot (\mu-3)!} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\xi^{\mu-5}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3)(A+\mu-5) \cdot (\mu-5)!} + \dots \right) + \\
 & + u^\mu \left(\frac{\xi^{\mu-2}}{(A+\mu-2) \cdot (\mu-2)!} + \frac{\xi^{\mu-4}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4) \cdot (\mu-4)!} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\xi^{\mu-6}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4)(A+\mu-6) \cdot (\mu-6)!} + \dots \right) \Big] du
 \end{aligned}$$

Man kann das zweite Integrale in ein anderes mit den Grenzen 0 und $+\infty$ umwandeln, man braucht nur in demselben statt der Variablen u die Variable $-u$ zu schreiben. Thut man dies, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 z = & C_1 \int_0^{\infty} u^{A+\mu-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{\xi^\mu}{\mu!} + \frac{u \xi^{\mu+1}}{(\mu+1)!} + \frac{u^2 \xi^{\mu+2}}{(\mu+2)!} + \dots \right. \\
 & + u \left(\frac{\xi^{\mu-1}}{(A+\mu-1) \cdot (\mu-1)!} + \frac{\xi^{\mu-3}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3) \cdot (\mu-3)!} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\xi^{\mu-5}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3)(A+\mu-5) \cdot (\mu-5)!} + \dots \right) + \\
 & + \frac{\xi^{\mu-2}}{(A+\mu-2) \cdot (\mu-2)!} + \frac{\xi^{\mu-4}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4) \cdot (\mu-4)!} + \\
 & \quad \left. + \frac{\xi^{\mu-6}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4)(A+\mu-6) \cdot (\mu-6)!} + \dots \right] du +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^{A+\mu} C_2 \int_0^\infty u^{A+\mu-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{\xi^\mu}{\mu!} - \frac{u \xi^{\mu+1}}{(\mu+1)!} + \frac{u^2 \xi^{\mu+2}}{(\mu+2)!} - \dots \right. \\
& - u \left(\frac{\xi^{\mu-1}}{(A+\mu-1) \cdot (\mu-1)!} + \frac{\xi^{\mu-3}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3) \cdot (\mu-3)!} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\xi^{\mu-5}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3)(A+\mu-5) \cdot (\mu-5)!} + \dots \right) + \\
& + \frac{\xi^{\mu-2}}{(A+\mu-2) \cdot (\mu-2)!} + \frac{\xi^{\mu-4}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4) \cdot (\mu-4)!} + \\
& \quad \left. + \frac{\xi^{\mu-6}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4)(A+\mu-6) \cdot (\mu-6)!} + \dots \right] du
\end{aligned}$$

Man kann nun dies Integrale auch so schreiben:

$$\begin{aligned}
z &= B_1 \int_0^\infty u^{A+\mu-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{\xi^\mu}{\mu!} + \frac{u^2 \xi^{\mu+2}}{(\mu+2)!} + \frac{u^4 \xi^{\mu+4}}{(\mu+4)!} + \dots \right. \\
& + \frac{\xi^{\mu-2}}{(A+\mu-2) \cdot (\mu-2)!} + \frac{\xi^{\mu-4}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4) \cdot (\mu-4)!} + \\
& \quad \left. + \frac{\xi^{\mu-6}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4)(A+\mu-6) \cdot (\mu-6)!} + \dots \right] du + \\
& + B_2 \int_0^\infty u^{A+\mu} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{\xi^{\mu+1}}{(\mu+1)!} + \frac{u^2 \xi^{\mu+3}}{(\mu+3)!} + \frac{u^4 \xi^{\mu+5}}{(\mu+5)!} + \dots \right. \\
& + \frac{\xi^{\mu-1}}{(A+\mu-1) \cdot (\mu-1)!} + \frac{\xi^{\mu-3}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3) \cdot (\mu-3)!} + \\
& \quad \left. + \frac{\xi^{\mu-5}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3)(A+\mu-5) \cdot (\mu-5)!} + \dots \right] du
\end{aligned} \tag{123}$$

unter B_1 und B_2 willkürliche Constante verstanden.

Nun ist (siehe §. 50)

$$\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} u^m du = 2^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \quad m+1 > 0$$

folglich hat man:

$$\begin{aligned}
z &= 2^{\frac{A+\mu}{2}-1} \cdot B_1 \left[\frac{\xi^\mu}{\mu!} \Gamma\left(\frac{A+\mu}{2}\right) + 2 \cdot \frac{\xi^{\mu+2}}{(\mu+2)!} \Gamma\left(\frac{A+\mu}{2} + 1\right) \right. \\
& \quad + 4 \cdot \frac{\xi^{\mu+4}}{(\mu+4)!} \Gamma\left(\frac{A+\mu}{2} + 2\right) + \dots \\
& + \Gamma\left(\frac{A+\mu}{2}\right) \left(\frac{\xi^{\mu-2}}{(A+\mu-2) \cdot (\mu-2)!} + \frac{\xi^{\mu-4}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4) \cdot (\mu-4)!} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\xi^{\mu-6}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4)(A+\mu-6) \cdot (\mu-6)!} + \dots \right) \left. \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2^{\frac{A+\mu-1}{2}} \cdot B_2 \left[\frac{\xi^{\mu+1}}{(\mu+1)!} \Gamma\left(\frac{A+\mu+1}{2}\right) + 2 \cdot \frac{\xi^{\mu+3}}{(\mu+3)!} \Gamma\left(\frac{A+\mu+1}{2} + 1\right) + \right. \\
& \quad \left. + 4 \cdot \frac{\xi^{\mu+5}}{(\mu+5)!} \Gamma\left(\frac{A+\mu+1}{2} + 2\right) + \dots \right. \\
& \quad \left. + \Gamma\left(\frac{A+\mu+1}{2}\right) \left(\frac{\xi^{\mu-1}}{(A+\mu-1) \cdot (\mu-1)!} + \frac{\xi^{\mu-3}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3) \cdot (\mu-3)!} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\xi^{\mu-5}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3)(A+\mu-5) \cdot (\mu-5)!} + \dots \right) \right]
\end{aligned}$$

Beachtet man nun die Gleichung:

$$\Gamma(A+n) = A(A+1)(A+2) \dots (A+n-1) \cdot \Gamma(A) \quad A > 0 \quad (22)$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}
z = L_1 & \left[\frac{\xi^\mu}{\mu!} + (A+\mu) \cdot \frac{\xi^{\mu+2}}{(\mu+2)!} + (A+\mu)(A+\mu+2) \cdot \frac{\xi^{\mu+4}}{(\mu+4)!} + \dots \right. \\
& + \frac{\xi^{\mu-2}}{(A+\mu-2) \cdot (\mu-2)!} + \frac{\xi^{\mu-4}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4) \cdot (\mu-4)!} + \\
& \quad \left. + \frac{\xi^{\mu-6}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4)(A+\mu-6) \cdot (\mu-6)!} + \dots \right] + \\
& + L_2 \left[\frac{\xi^{\mu+1}}{(\mu+1)!} + (A+\mu+1) \cdot \frac{\xi^{\mu+3}}{(\mu+3)!} + (A+\mu+1)(A+\mu+3) \cdot \frac{\xi^{\mu+5}}{(\mu+5)!} + \dots \right. \\
& + \frac{\xi^{\mu-1}}{(A+\mu-1) \cdot (\mu-1)!} + \frac{\xi^{\mu-3}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3) \cdot (\mu-3)!} + \\
& \quad \left. + \frac{\xi^{\mu-5}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3)(A+\mu-5) \cdot (\mu-5)!} + \dots \right]
\end{aligned} \quad (124)$$

woselbst L_1 und L_2 willkürliche Constante bezeichnen.

Diese Reihen sind merkwürdigerweise wieder, bis auf einen constanten Factor, ganz mit denen identisch, welche wir in (117) aufgestellt haben. Man kann daher aus dem in den letzten vier Paragraphen Gefundenen die Folgerung ziehen, dass alle die im §. 48 angeführten Integrale entwickelt, zu folgenden Reihen führen:

$$\begin{aligned}
z = B_1 & \left[1 + A \cdot \frac{\xi^2}{2!} + A(A+2) \cdot \frac{\xi^4}{4!} + A(A+2)(A+4) \cdot \frac{\xi^6}{6!} + \dots \right] + \\
& + B_2 \left[\xi + (A+1) \frac{\xi^3}{3!} + (A+1)(A+3) \cdot \frac{\xi^5}{5!} + (A+1)(A+3)(A+5) \cdot \frac{\xi^7}{7!} + \dots \right]
\end{aligned} \quad (117)$$

und diese haben folgende Haupteigenschaften:

1. Sie sind von einander verschieden; man sieht dies schon daraus, dass die erste Reihe nach geraden Potenzen von ξ , die zweite nach ungeraden Potenzen von ξ fortschreitet.
2. Ist $A=0$ oder ist A eine reelle, gerade und negative Zahl, so ist das mit der willkürlichen Constanten B_1 multiplicirte Integrale ein endliches algebraisches Polynom; ist hingegen A eine reelle, ungerade und negative Zahl, so ist das mit der willkürlichen Constanten B_2 multiplicirte Integrale ein endliches algebraisches Polynom,

3. Ist A nicht Null und ist auch A keine reelle, ganze negative Zahl, so sind die beiden in (117) aufgestellten Reihen unendliche, und für jeden Werth von ξ convergirende.

§. 54.

Wir wollen noch ein numerisches Beispiel für den letztgegebenen Fall anführen. Es sei zu integrieren die Gleichung:

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} - \frac{13}{2} z$$

für welche $A = -\frac{13}{2}$ und somit $\mu = 7$ ist. Aus (124) folgt für dieselbe folgendes Integrale:

$$\begin{aligned} z = L_1 & \left[\frac{\xi^7}{7!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi^9}{9!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{\xi^{11}}{11!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{\xi^{13}}{13!} + \dots \right. \\ & \left. + \frac{\xi^5}{-\frac{3}{2} \cdot 5!} + \frac{\xi^3}{\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot 3!} + \frac{\xi}{-\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{11}{2}} \right] + \\ & + L_2 \left[\frac{\xi^8}{8!} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\xi^{10}}{10!} + \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{\xi^{12}}{12!} + \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{\xi^{14}}{14!} + \dots \right. \\ & \left. + \frac{\xi^6}{-\frac{1}{2} \cdot 6!} + \frac{\xi^4}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 4!} + \frac{\xi^2}{-\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot 2!} + \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{13}{2}} \right] \end{aligned}$$

Man kann dies auch so ordnen:

$$\begin{aligned} z = L_1 & \left[-\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{11} \xi + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{\xi^3}{3!} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\xi^5}{5!} + \frac{\xi^7}{7!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi^9}{9!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{\xi^{11}}{11!} + \dots \right] + \\ & + L_2 \left[\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{13} - \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{\xi^2}{2!} + \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{\xi^4}{4!} - \frac{2}{1} \cdot \frac{\xi^6}{6!} + \frac{\xi^8}{8!} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\xi^{10}}{10!} + \dots \right] \end{aligned}$$

Nun gibt die Reihe (117), wenn man in dieselbe $A = -\frac{13}{2}$ setzt:

$$\begin{aligned} z = B_1 & \left[1 - \frac{13}{2!} \cdot \frac{\xi^2}{2} + \frac{13}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{\xi^4}{4!} - \frac{13}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{\xi^6}{6!} + \dots \right] + \\ & + B_2 \left[\xi - \frac{11}{2} \cdot \frac{\xi^3}{3!} + \frac{11}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{\xi^5}{5!} - \frac{11}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\xi^7}{7!} + \dots \right] \end{aligned}$$

und hieraus sieht man, dass in der That die beiden so eben aufgestellten unendlichen Reihen, bis auf einen constanten Factor, dieselben sind.

§. 55.

Man könnte vielleicht die Frage aufwerfen, wieso es kömmt, dass die Differentialgleichungen, welche wir im ersten Capitel dieses Abschnittes untersucht haben, und welche wir daselbst mittelst bestimmter Integrale integrierten, keine unendlichen Grenzen zulassen, während die Integrale der Differentialgleichungen, die wir in diesem Capitel in Betracht gezogen, stets die Grenze ∞ haben, und diese hier gewonnenen Integrale vollständig tadellos, und stets in unendliche convergente Reihen entwickelbar sind. Der Grund scheint der zu sein, dass bei den

Differentialgleichungen, die in dem dritten Capitel dieses Abschnittes integrirt wurden, die Gleichung, welche zur Bestimmung der Integrationsgrenzen dient, stets den Factor $e^{-\frac{u^2}{2}}$ enthält, welcher für $u = \pm \infty$ eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung wird. Es ist nämlich

$$e^{-\frac{u^2}{2}} = \left(e^{-\frac{u}{2}}\right)^u$$

und dies geht über für $u = \infty$ in

$$e^{-\frac{1}{2}\infty^2} = 0^\infty$$

§. 56.

Trotzdem man auf die eben angezeigte Weise die Gleichung

$$n y'' + (m + x - n\alpha) y' + [A - \alpha(m + x)] y = 0 \quad (89)$$

vollständig und in jedem Falle zu integriren vermag, will ich dennoch eine andere Methode mittheilen, um das Integrale dieser Gleichung zu erhalten.

Führt man nämlich in (89) statt y eine andere Variable z ein, mittelst der Substitution

$$y = e^{\alpha x} z$$

so erhält man:

$$n z'' + (m + x + n\alpha) z' + A z = 0 \quad (96)$$

Wird diese Gleichung μ mal differenzirt, unter μ eine einstweilen noch ganz unbestimmte Zahl verstanden, so erhält man:

$$n z^{(\mu+2)} + (m + x + n\alpha) z^{(\mu+1)} + (A + \mu) z^{(\mu)} = 0$$

und wählt man nun μ so, dass

$$A + \mu = 0$$

wird, so erhält man:

$$n z^{(2-A)} + (m + x + n\alpha) z^{(1-A)} = 0 \quad (125)$$

und diese Gleichung lässt sich auch so schreiben:

$$n \frac{d \cdot z^{(1-A)}}{dx} + (m + x + n\alpha) z^{(1-A)} = 0$$

Durch Trennung der Variablen erhält man:

$$\frac{d \cdot z^{(1-A)}}{z^{(1-A)}} = - \frac{m + x + n\alpha}{n} dx$$

hieraus folgt durch Integration:

$$\log z^{(1-A)} = - \frac{m + n\alpha}{n} \cdot x - \frac{x^2}{2n}$$

folglich ist:

$$z^{(1-A)} = e^{-\frac{m + n\alpha}{n} \cdot x - \frac{x^2}{2n}}$$

hieraus ergibt sich folgender Werth für z :

$$z = \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[e^{-\frac{m + n\alpha}{n} \cdot x - \frac{x^2}{2n}} \right]$$

und somit ist:

$$y = e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[e^{-\frac{m+n\alpha}{n}x - \frac{x^2}{2n}} \right] \quad (126)$$

Im Falle A eine ganze positive Zahl ist, ist dieses Integrale besonders beachtenswerth, weil es in so einfacher und eleganter Form auftritt. Der Weg, den wir eingeschlagen haben, um dieses Integrale zu erhalten, ist äusserst einfach, aber es lässt sich Manches dagegen einwenden. Denn, indem wir die Gleichung (96) μ mal differenzirten, müssten wir, da später $\mu = -A$ gesetzt wurde, und $-A$ eine ganze negative Zahl ist, die Gleichung (125) eigentlich folgendermassen schreiben:

$$n z^{(2-A)} + (m + x + n\alpha) z^{(1-A)} = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_{A-1} x^{A-1}$$

woselbst

$$C_0, C_1, C_2 \dots C_{A-1}$$

willkürliche Constante sind, und da wir dies nicht thaten, sind wir genöthigt, einen andern Weg einzuschlagen, um das in (126) stehende Integrale auf correctem Wege zu erlangen.

§. 57.

Wir setzen wieder, wie früher, in die Gleichung

$$n y'' + (m + x - n\alpha) y' + [A - \alpha(m + x)] y = 0 \quad (89)$$

in welcher A eine ganze positive Zahl bedeutet,

$$y = e^{\alpha x} z$$

und erhalten hiedurch

$$n z'' + (m + x + n\alpha) z' + A z = 0 \quad (96)$$

In dem speciellen Falle, in welchem $A = 1$ ist, lässt sich diese Gleichung sehr leicht integriren. Setzt man in (96) $A = 1$ und statt der Variablen z die Variable z_1 , so erhält man:

$$n z_1'' + (m + x + n\alpha) z_1' + z_1 = 0 \quad (127)$$

Diese Gleichung gibt, einmal integrirt:

$$n z_1' + (m + x + n\alpha) z_1 = C$$

woselbst C eine willkürliche Constante bezeichnet. Aus dieser Gleichung folgt:

$$z_1 = \frac{C}{n} \cdot e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \int e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} dx \quad (128)$$

Differenzirt man nun die Gleichung (127) $A - 1$ mal nach x , so erhält man:

$$n z_1^{(A+1)} + (m + x + n\alpha) z_1^{(A)} + A z_1^{(A-1)} = 0$$

und es ist klar, dass auch dieser Gleichung der in (128) stehende Werth von z_1 Genüge leistet. Setzt man nun in die letzte Gleichung

$$z_1^{(A-1)} = z$$

so geht dieselbe über in:

$$n z'' + (m + x + n\alpha) z' + A z = 0 \quad (96)$$

und ihr genügt:

$$z = \frac{C}{n} \cdot \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \int e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} dx \right]$$

folglich ist das vollständige Integrale der Gleichung (89) für reelle, ganze und positive Werthe von A :

$$y = e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \int e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} dx \right]$$

und dies lässt sich auch so schreiben:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \right] + C_2 e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \int e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} dx \right] \quad (129)$$

unter C_1 und C_2 willkürliche Constante verstanden.

Das erste particuläre Integrale unterscheidet sich, wie man sieht, von dem in (126) gegebenen particulären Integrale bloß durch einen constanten Factor.

§. 58.

Ich will nun die Gleichung

$$n y'' + (m + x - n\alpha) y' + [A - \alpha(m + x)] y = 0 \quad (89)$$

in ähnlicher Weise in dem Falle integrieren, in welchem A ganz und negativ ist. Zu dem Zwecke setze ich in (89)

$$y = e^{-\frac{(m+x)^2}{2n}} z \quad (130)$$

unter z eine neue Variable verstanden.

Aus (130) folgt:

$$y' = e^{-\frac{(m+x)^2}{2n}} \left[z' - \frac{m+x}{n} z \right]$$

$$y'' = e^{-\frac{(m+x)^2}{2n}} \left[z'' - 2 \cdot \frac{m+x}{n} \cdot z' + \left(\frac{m+x}{n} \right)^2 z - \frac{z}{n} \right]$$

setzt man diese Werthe in die Gleichung (89), so erhält man:

$$n z'' - (n\alpha + m + x) z' + (A - 1) z = 0 \quad (131)$$

und diese Gleichung ist für den Werth $A = 0$ äusserst leicht zu integrieren.

Setzt man nämlich in (131) $A = 0$ und zugleich $z = z_1$, so hat man:

$$n z_1'' - (n\alpha + m + x) z_1' - z_1 = 0 \quad (132)$$

Wird diese Gleichung einmal integrirt, so erhält man:

$$n z_1' - (n\alpha + m + x) z_1 = C$$

und hieraus folgt:

$$z_1 = \frac{C}{n} e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \int e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} dx \quad (133)$$

Differenziert man nun die Gleichung (132) $-A$ mal, was leicht geht, weil $-A$ nach der Voraussetzung eine ganze positive Zahl ist, so erhält man:

$$n z_1^{(2-A)} - (n\alpha + m + x) z_1^{(1-A)} + (A-1) z_1^{(-A)} = 0 \quad (134)$$

und es ist klar, dass auch dieser Gleichung der in (133) stehende Werth von z_1 genügt. Setzt man nun:

$$z_1^{(-A)} = z$$

so geht die Gleichung (134) über in

$$n z'' - (n\alpha + m + x) z' + (A-1) z = 0 \quad (131)$$

und ihr genügt:

$$z = \frac{C}{n} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}} \left[e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \int e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} dx \right]$$

folglich ist das vollständige Integrale der vorgelegten Gleichung (89) für den Fall, in welchem A ganz und negativ ist:

$$y = e^{-\frac{(m+x)^2}{2n}} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}} \left[e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \int e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} dx \right]$$

und dies lässt sich auch so schreiben:

$$y = C_1 e^{-\frac{(m+x)^2}{2n}} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}} \left[e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \right] + \\ + C_2 e^{-\frac{(m+x)^2}{2n}} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}} \left[e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \int e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} dx \right] \quad (135)$$

unter C_1 und C_2 willkürliche Constante verstanden.

Leicht überzeugt man sich, dass diese Formel auch für $A=0$ giltig ist.

§. 59.

Wir haben im §. 48 das Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} + Az \quad (97)$$

für den Fall, in welchem A eine ganze positive Zahl ist, in folgender Form gegeben:

$$z = \frac{d^{A-1}}{d\xi^{A-1}} \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda^2}{2}} (C_1 e^{+\lambda\xi} + C_2 e^{-\lambda\xi}) d\lambda$$

es lässt sich aber das Integrale der Gleichung (97) für den erwähnten Fall auch mittelst der Formel (129) angeben. Setzt man nämlich in dieselbe:

für m die Zahl	0
" n " " "	-1
" α " " "	0
" y " Variable	z
" x " " "	ξ

so erhält man

$$z = C_1 \frac{d^{A-1}}{d\xi^{A-1}} \left[e^{\frac{\xi^2}{2}} \right] + C_2 \frac{d^{A-1}}{d\xi^{A-1}} \left[e^{\frac{\xi^2}{2}} \int e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \right]$$

Es ist daher ein particuläres Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} + z$$

da für dieselbe $A = 1$ ist, folgendes:

$$z = e^{\frac{\xi^2}{2}}$$

Ferner ist ein particuläres Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} + 2z$$

für welches $A = 2$ ist, nachstehendes:

$$z = \xi e^{\frac{\xi^2}{2}}$$

und ein particuläres Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} + 3z$$

ist, da hiefür $A = 3$ ist

$$z = (1 + \xi^2) e^{\frac{\xi^2}{2}}$$

u. s. f. Das vollständige Integrale der eben aufgestellten drei Differentialgleichungen ergibt sich am einfachsten mittelst der Methode der Variation der willkürlichen Constanten, und sie sind der Reihe nach (siehe §. 46)

$$z = e^{+\frac{\xi^2}{2}} \int e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$$

$$z = \xi e^{+\frac{\xi^2}{2}} \int e^{-\frac{\xi^2}{2}} \frac{d\xi}{\xi^2}$$

$$z = (1 + \xi^2) e^{+\frac{\xi^2}{2}} \int e^{-\frac{\xi^2}{2}} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^2}$$

§. 60.

Man kann die Gleichung

$$n y'' + (m + x - n\alpha) y' + [A - \alpha(m + x)] y = 0 \quad (89)$$

in dem Falle, in welchem A eine ganze und negative Zahl ist, auch leicht mittelst der von Petzval herrührenden Methode integrieren. Wir fanden nämlich im §. 27 für das Integrale der Gleichung (1) folgenden Werth:

$$y = \left\{ \frac{d^h}{du^h} \left[\frac{(u - \alpha)^{h+1}}{U_1} \cdot e^{ux + \int \frac{U_0 du}{U_1}} \right] \right\}_{u=\alpha} \quad (67)$$

Nun ist für den vorliegenden Fall

$$\frac{U_0}{U_1} = m + nu + \frac{A}{u - \alpha} \quad (12)$$

folglich

$$\int \frac{U_0}{U_1} du = mu + \frac{n}{2} u^2 + A \log(u - \alpha)$$

und

$$e^{\int \frac{U_0}{U_1} du} = (u - \alpha)^A e^{mu + \frac{n}{2} u^2}$$

somit hat man:

$$y = \left\{ \frac{d^h}{du^h} \left[(u - \alpha)^{A+h} e^{u(m+x) + \frac{n}{2} u^2} \right] \right\}_{u=\alpha}$$

Dies vereinfacht sich für $h = -A$, und geht hiefür über in:

$$y = \left\{ \frac{d^{-A}}{du^{-A}} \left[e^{u(m+x) + \frac{n}{2} u^2} \right] \right\}_{u=\alpha} \quad (136)$$

Um diesen Werth von y in entwickelter Gestalt darzustellen, hat man den Ausdruck:

$$e^{u(m+x) + \frac{n}{2} u^2}$$

— A mal nach u zu differenziren, und da — A eine ganze positive Zahl ist, so lässt sich dies sehr leicht machen. Dann, nachdem man die — A malige Differentiation vorgenommen hat, hat man für die Variable u die constante Zahl α einzusetzen.

§. 61.

Wir haben nun die Gleichung (89) in allen Fällen integrieren gelehrt, wollen aber doch noch eine andere Methode mittheilen, um das Integrale der Gleichung (89) zu erhalten.

Führt man nämlich in die Gleichung

$$ny'' + (m + x - n\alpha)y' + [A - \alpha(m + x)]y = 0 \quad (89)$$

für y eine neue Variable z ein, mittelst der Substitution

$$y = e^{\alpha x} \cdot z$$

so erhält man die Gleichung

$$nz'' + (m + x + n\alpha)z' + Az = 0 \quad (96)$$

Führt man nun hierin eine neue unabhängige Variable ξ ein mittelst der Substitution

$$\xi = (m + x + n\alpha)^2 \quad (137)$$

so erhält man, da

$$\frac{d\xi}{dx} = 2(m + x + n\alpha)$$

ist, und

$$z' = \frac{dz}{dx} = 2(m+x+n\alpha) \frac{dz}{d\xi}$$

$$z'' = \frac{dz'}{dx} = 4(m+x+n\alpha)^2 \frac{d^2z}{d\xi^2} + 2 \frac{dz}{d\xi}$$

oder reducirt

$$z'' = 4\xi \frac{d^2z}{d\xi^2} + 2 \frac{dz}{d\xi}$$

ist, folgende Gleichung zur Bestimmung von z

$$4n\xi \frac{d^2z}{d\xi^2} + 2(n+\xi) \frac{dz}{d\xi} + Az = 0 \quad (138)$$

und diese Gleichung ist ein specieller Fall der Gleichung

$$(m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]y = 0 \quad (14)$$

welche wir früher so ausführlich behandelten. Setzt man nämlich in diese Gleichung

statt m die Zahl 0

„ A „ „ $\frac{A}{2}$

„ B „ „ $\frac{1-A}{2}$

„ α „ „ 0

„ β „ „ $-\frac{1}{2n}$

„ x die Variable ξ

„ y „ „ z

so erhält man die Gleichung (138), und diese ist nun leicht zu integriren.

§. 62.

Entwickelt man das Integrale derselben mittelst der Formel (59), so erhält man:

$$z = \xi^{\frac{A-1}{2}} e^{-\frac{\xi}{2n}} \left[1 - (A-1)(A-2) \cdot \frac{n}{2\xi} + \frac{(A-1)(A-2)(A-3)(A-4)}{2!} \cdot \frac{n^2}{4\xi^2} - \right. \\ \left. - \frac{(A-1)(A-2)(A-3)(A-4)(A-5)(A-6)}{3!} \cdot \frac{n^3}{8\xi^3} + \dots \right]$$

Diese Formel ist tadellos in dem Falle, in welchem A eine ganze positive Zahl ist. Führt man in diese für ξ und z ihre Werthe ein, so erhält man:

$$y = e^{\alpha x} (m+x+n\alpha)^{A-1} e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \left[1 - \frac{n}{2} \cdot \frac{(A-1)(A-2)}{(m+x+n\alpha)^2} + \right. \\ \left. + \frac{n^2}{4} \cdot \frac{(A-1)(A-2)(A-3)(A-4)}{2! (m+x+n\alpha)^4} - \frac{n^3}{8} \cdot \frac{(A-1)(A-2)(A-3)(A-4)(A-5)(A-6)}{3! (m+x+n\alpha)^6} + \dots \right] \quad (139)$$

und diese Reihe ist offenbar die Entwicklung des im §. 57 gefundenen particulären Integrales, welches daselbst in der Form

$$y = e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \right]$$

auftrat.

Entwickelt man das Integrale der Gleichung (138) mittelst der Formel (60), so kömmt man zu der Reihe:

$$z = \xi^{-\frac{A}{2}} \left[1 + A(A+1) \cdot \frac{n}{2\xi} + \frac{A(A+1)(A+2)(A+3)}{2!} \cdot \frac{n^2}{4\xi^2} + \right. \\ \left. + \frac{A(A+1)(A+2)(A+3)(A+4)(A+5)}{3!} \cdot \frac{n^3}{8\xi^3} + \dots \right]$$

welche tadellos ist, im Falle A Null ist, oder eine ganze negative Zahl. Aus ihr folgt, wenn man für ξ und z ihre Werthe einführt:

$$y = e^{ax} (m+x+n\alpha)^{-A} \left[1 + \frac{n}{2} \cdot \frac{A(A+1)}{(m+x+n\alpha)^2} + \right. \\ \left. + \frac{n^2}{4} \cdot \frac{A(A+1)(A+2)(A+3)}{2! (m+x+n\alpha)^4} + \frac{n^3}{8} \cdot \frac{A(A+1)(A+2)(A+3)(A+4)(A+5)}{3! (m+x+n\alpha)^6} + \dots \right] \quad (140)$$

und es ist klar, dass man, bis auf einen constanten Factor, zu derselben Reihe gelangen muss, wenn man das in §. 58 gefundene particuläre Integrale

$$y = e^{-\frac{(m+x)^2}{2n}} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}} \left[e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \right]$$

entwickelt.

Viertes Capitel.

§. 63.

Ich komme nun zum letzten Falle, in welchem

$$\frac{U_0}{U_1} = a_2 u^2 + a_1 u + a_0 \quad (13)$$

ist, und somit die Gleichung (1) die Gestalt annimmt:

$$a_2 y'' + a_1 y' + (a_0 + x) y = 0 \quad (141)$$

Sie führt, nach der im §. 1 vorgetragenen Laplace'schen Methode behandelt, successive zu folgenden Gleichungen:

$$\int_{U_1}^{U_0} du = \frac{a_2}{3} u^3 + \frac{a_1}{2} u^2 + a_0 u$$

ferner ist

$$V = e^{\frac{a_2}{3} u^3 + \frac{a_1}{2} u^2 + a_0 u}$$

und

$$y = \int_{u_1}^{u_2} e^{u(a_0+x) + \frac{a_1}{2} u^2 + \frac{a_2}{3} u^3} du$$

Die Gleichung zur Bestimmung der Integrationsgrenzen lautet:

$$e^{u(a_0+x) + \frac{a_1}{2} u^2 + \frac{a_2}{3} u^3} = 0$$

und ihr wird Genüge geleistet, wenn man u so wählt, dass

$$a_2 u^3 = -\infty$$

wird. Bezeichnet man die drei Wurzeln der Gleichung

$$a_2 u^3 = -1$$

mit μ_1 , μ_2 und μ_3 , so sind die drei Wurzeln der Gleichung $a_2 u^3 = -\infty$

$$\mu_1 \infty, \quad \mu_2 \infty, \quad \mu_3 \infty$$

und man kann (nach Petzval's Vorgang, siehe dessen Werk: „Integration der linearen Differentialgleichungen“, I. Band, Seite 56) das vollständige Integrale der Gleichung (141) folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned} y = & C_1 \int_0^{\mu_1 \infty} e^{u(a_0+x) + \frac{a_1}{2} u^2 + \frac{a_2}{3} u^3} du + \\ & + C_2 \int_0^{\mu_2 \infty} e^{u(a_0+x) + \frac{a_1}{2} u^2 + \frac{a_2}{3} u^3} du + \\ & + C_3 \int_0^{\mu_3 \infty} e^{u(a_0+x) + \frac{a_1}{2} u^2 + \frac{a_2}{3} u^3} du \end{aligned} \quad (142)$$

woselbst C_1 , C_2 und C_3 willkürliche Constante bedeuten, deren Summe gleich Null ist. Um sich von der Richtigkeit dieses Integrales zu überzeugen, substituirt man den in (142) gefundenen Werth von y in die Differentialgleichung (141); man erhält sodann:

$$\begin{aligned} a_2 y'' + a_1 y' + (a_0 + x) y = & \\ = C_1 \int_0^{\mu_1 \infty} (a_2 u^2 + a_1 u + a_0 + x) e^{u(a_0+x) + \frac{a_1}{2} u^2 + \frac{a_2}{3} u^3} du + & \\ + C_2 \int_0^{\mu_2 \infty} (a_2 u^2 + a_1 u + a_0 + x) e^{u(a_0+x) + \frac{a_1}{2} u^2 + \frac{a_2}{3} u^3} du + & \\ + C_3 \int_0^{\mu_3 \infty} (a_2 u^2 + a_1 u + a_0 + x) e^{u(a_0+x) + \frac{a_1}{2} u^2 + \frac{a_2}{3} u^3} du & \end{aligned} \quad (143)$$

Nun lassen sich die hier stehenden Integrationen wirklich ausführen, denn es ist identisch:

$$\int (a_2 u^2 + a_1 u + a_0 + x) e^{u(a_0+x) + \frac{a_1}{2} u^2 + \frac{a_2}{3} u^3} du = e^{u(a_0+x) + \frac{a_1}{2} u^2 + \frac{a_2}{3} u^3}$$

demnach gestattet die Gleichung (143) folgende Schreibweise:

$$\begin{aligned} a_2 y'' + a_1 y' + (a_0 + x) y = & \\ = C_1 \left[e^{u(a_0+x) + \frac{a_1}{2} u^2 + \frac{a_2}{3} u^3} \right]_0^{\mu_1 \infty} + & \\ + C_2 \left[e^{u(a_0+x) + \frac{a_1}{2} u^2 + \frac{a_2}{3} u^3} \right]_0^{\mu_2 \infty} + & \\ + C_3 \left[e^{u(a_0+x) + \frac{a_1}{2} u^2 + \frac{a_2}{3} u^3} \right]_0^{\mu_3 \infty} & \end{aligned} \quad (144)$$

Führt man nun in die eingeklammerten Ausdrücke statt u die oberen Grenzwerte ein, so verschwinden die Substitutionsresultate; führt man sodann statt u die unteren Grenzwerte ein, so erhält man

$$C_1 + C_2 + C_3$$

und da dies gleich Null sein soll, so leistet der Ausdruck (142) wirklich der Gleichung (141) Genüge.

Das in (142) stehende Integrale der Gleichung (141) lässt sich vereinfachen. Führt man nämlich im ersten Integrale für u eine neue Variable v ein mittelst der Substitution $u = \mu_1 v$, ferner im zweiten Integrale für u die neue Variable v mittelst der Substitution $u = \mu_2 v$, und setzt man im dritten Integrale $u = \mu_3 v$, so erhält man, unter steter Berücksichtigung der Gleichungen

$$a_2 \mu_1^3 = -1 \quad a_2 \mu_2^3 = -1 \quad a_3 \mu_3^3 = -1$$

folgenden Werth von y :

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{v^3}{3}} \left[C_1 \mu_1 e^{(a_0+x)\mu_1 v + \frac{a_1}{2}\mu_1^2 v^2} + C_2 \mu_2 e^{(a_0+x)\mu_2 v + \frac{a_1}{2}\mu_2^2 v^2} + C_3 \mu_3 e^{(a_0+x)\mu_3 v + \frac{a_1}{2}\mu_3^2 v^2} \right] dv \quad (144)$$

unter C_1, C_2, C_3 willkürliche Constante verstanden, die der Gleichung

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

Genüge leisten, und unter μ_1, μ_2, μ_3 solche Zahlen, welche aus der Gleichung

$$a_2 u^3 = -1$$

als Wurzeln für u hervorgehen.

§. 64.

Die Gleichung

$$a_2 y'' + a_1 y' + (a_0 + x) y = 0 \quad (141)$$

lässt sich auch auf andere Art integriren. Setzt man nämlich

$$y = e^{\lambda x} z$$

so erhält man die Gleichung

$$a_2 z'' + (2\lambda a_2 + a_1) z' + (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 + x) z = 0$$

welche sich vereinfacht, wenn man λ so wählt, dass

$$2\lambda a_2 + a_1 = 0$$

wird, man erhält dann die Gleichung

$$a_2 z'' + (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 + x) z = 0 \quad (145)$$

welche Liouville im XXI. Bande von Gergonne's *Annales des Mathematiques* im Jahre 1830 integrirte. Führt man mit Liouville in die Gleichung (145) für x eine neue Variable ξ in Rechnung ein mittelst der Substitution

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 + x = -\xi \sqrt[3]{a_2}$$

so erhält man, da

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\sqrt[3]{a_2}} \cdot \frac{dz}{d\xi}$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{a_2^2}} \cdot \frac{d^2 z}{d\xi^2}$$

ist, die Gleichung: *)

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi z \quad (146)$$

Ihr Integrale geht aus dem in (144) aufgestellten Integrale hervor, wenn man in demselben

$$a_2 = -1, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = 0$$

setzt; man erhält dann als Integrale der Gleichung (146)

$$z = \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} \left[C_1 \mu_1 e^{\mu_1 u \xi} + C_2 \mu_2 e^{\mu_2 u \xi} + C_3 \mu_3 e^{\mu_3 u \xi} \right] du \quad (147)$$

unter C_1, C_2, C_3 willkürliche Constante verstanden, zwischen welchen die Gleichung

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

stattfindet, und in welchen μ_1, μ_2, μ_3 die drei Wurzeln der Gleichung

$$u^3 = 1$$

sind.

§. 65.

Man kann leicht das in (147) stehende Integrale in unendliche, für jeden Werth von ξ convergente Reihen entwickeln. Die Gleichung (147) lässt sich nämlich folgendermassen schreiben:

$$z = \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} \left[C_1 \mu_1 \left(1 + \mu_1 u \xi + \frac{\mu_1^2 u^2 \xi^2}{2!} + \frac{\mu_1^3 u^3 \xi^3}{3!} + \frac{\mu_1^4 u^4 \xi^4}{4!} + \dots \right) + \right. \\ \left. + C_2 \mu_2 \left(1 + \mu_2 u \xi + \frac{\mu_2^2 u^2 \xi^2}{2!} + \frac{\mu_2^3 u^3 \xi^3}{3!} + \frac{\mu_2^4 u^4 \xi^4}{4!} + \dots \right) + \right. \\ \left. + C_3 \mu_3 \left(1 + \mu_3 u \xi + \frac{\mu_3^2 u^2 \xi^2}{2!} + \frac{\mu_3^3 u^3 \xi^3}{3!} + \frac{\mu_3^4 u^4 \xi^4}{4!} + \dots \right) \right] du$$

und diese führt auf:

$$z = (C_1 \mu_1 + C_2 \mu_2 + C_3 \mu_3) \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} du + \\ + (C_1 \mu_1^2 + C_2 \mu_2^2 + C_3 \mu_3^2) \xi \int_0^\infty u e^{-\frac{u^3}{3}} du +$$

*) Euler war nicht im Stande, diese Gleichung zu integrieren. Siehe dessen vollständige Anleitung zur Integralrechnung, aus dem Lateinischen in's Deutsche übersetzt von Joh. Salomon, II. Band, S. 86.

$$z = B_1 \left[3^{-\frac{2}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) + 3^{\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \frac{\xi^3}{3!} + 3^{\frac{4}{3}} \Gamma\left(\frac{7}{3}\right) \frac{\xi^6}{6!} + 3^{\frac{7}{3}} \Gamma\left(\frac{10}{3}\right) \frac{\xi^9}{9!} + \dots \right] + \\ + B_2 \left[3^{-\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \xi + 3^{\frac{2}{3}} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \frac{\xi^4}{4!} + 3^{\frac{5}{3}} \Gamma\left(\frac{8}{3}\right) \frac{\xi^7}{7!} + 3^{\frac{8}{3}} \Gamma\left(\frac{11}{3}\right) \frac{\xi^{10}}{10!} + \dots \right]$$

oder wenn man die Formel:

$$\Gamma(A + n) = A(A + 1)(A + 2) \dots (A + n - 1) \Gamma(A) \quad A > 0 \quad (22)$$

berücksichtigt, und die willkürlichen Constanten $3^{-\frac{2}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) B_1$ und $3^{-\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) B_2$ mit L_1 und L_2 bezeichnet:

$$z = L_1 \left(1 + \frac{\xi^3}{3!} + 4 \cdot \frac{\xi^6}{6!} + 4 \cdot 7 \cdot \frac{\xi^9}{9!} + 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \frac{\xi^{12}}{12!} + \dots \right) + \\ + L_2 \left(\xi + 2 \cdot \frac{\xi^4}{4!} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{\xi^7}{7!} + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\xi^{10}}{10!} + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \frac{\xi^{13}}{13!} + \dots \right) \quad (150)$$

und dies ist der in unendliche Reihen entwickelte Werth des Integrales (146), L_1 und L_2 bedeuten willkürliche Constante.

§. 66.

Die so eben gefundenen und in (150) aufgestellten Reihen sind convergent für jeden Werth von ξ , und leisten wirklich der Gleichung

$$\frac{d^2 z}{d \xi^2} = \xi z \quad (146)$$

Genüge. Um dies einzusehen, bilde man z' und z'' . Denn es ist:

$$z' = L_1 \left[\frac{\xi^2}{2!} + 4 \cdot \frac{\xi^5}{5!} + 4 \cdot 7 \cdot \frac{\xi^8}{8!} + 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \frac{\xi^{11}}{11!} + \dots \right] + \\ + L_2 \left[1 + 2 \cdot \frac{\xi^3}{3!} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{\xi^6}{6!} + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\xi^9}{9!} + \dots \right]$$

und

$$z'' = L_1 \left[\xi + \frac{\xi^4}{3!} + 4 \cdot \frac{\xi^7}{6!} + 4 \cdot 7 \cdot \frac{\xi^{10}}{9!} + 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \frac{\xi^{13}}{12!} + \dots \right] + \\ + L_2 \left[\xi^2 + 2 \cdot \frac{\xi^5}{4!} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{\xi^8}{7!} + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\xi^{11}}{10!} + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \frac{\xi^{14}}{13!} + \dots \right]$$

und nun sieht man, dass in der That dieser Werth von z'' gleich ist dem in (150) gefundenen, mit ξ zu multiplicirenden Werthe von z .

§. 67.

Man könnte hier, wie im §. 55 fragen, wieso es kömmt, dass die in diesem Capitel behandelten Differentialgleichungen, und namentlich die Gleichung

$$\frac{d^2 z}{d \xi^2} = \xi z \quad (146)$$

auf welche sich die erwähnten Gleichungen stets zurückführen lassen, Integrale mit unendlichen Grenzen zulassen, während die im ersten Capitel behandelten Differentialgleichungen in der Regel, wenn man die Grenzen unendlich gross annimmt, zu divergenten Reihen führen.

Der Grund scheint der zu sein, dass die Gleichung, welche zur Bestimmung der Integrationsgrenzen dient, stets den Factor

$$e^{-\frac{u^3}{3}}$$

enthält, welcher für $u = \infty$ eine unendlich kleine Grösse von sehr hoher Ordnung wird. Es ist nämlich

$$e^{-\frac{u^3}{3}} = \left[\left(e^{-\frac{u}{3}} \right)^u \right]^u$$

und dies geht für $u = \infty$ über in:

$$e^{-\frac{1}{3}\infty^3} = (0^\infty)^\infty$$

§. 68.

Die Gleichung

$$a_2 y'' + a_1 y' + (a_0 + x) y = 0 \quad (141)$$

gestattet noch eine andere Behandlungsweise. Setzt man nämlich, wie es Weiler*) thut

$$y = e^{\lambda x} z$$

so erhält man:

$$a_2 z'' + (2\lambda a_2 + a_1) z' + (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 + x) z = 0$$

und diese Gleichung vereinfacht sich, wenn man λ so wählt, dass

$$2\lambda a_2 + a_1 = 0$$

wird, denn man erhält dann:

$$a_2 z'' + (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 + x) z = 0 \quad (151)$$

Führt man in diese Gleichung eine neue unabhängige Variable ξ ein, mittelst der Substitution:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 + x = \xi^{\frac{2}{3}}$$

so erhält man, da

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{3}{2} \cdot \xi^{\frac{1}{3}} \frac{dz}{d\xi}$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{9}{4} \xi^{\frac{2}{3}} \frac{d^2 z}{d\xi^2} + \frac{3}{4} \xi^{-\frac{1}{3}} \frac{dz}{d\xi}$$

ist, statt der Gleichung (151) folgende Gleichung:

$$9 a_2 \xi \frac{d^2 z}{d\xi^2} + 3 a_2 \frac{dz}{d\xi} + 4 \xi z = 0 \quad (152)$$

Diese Gleichung ist ein specieller Fall der Gleichung (14) und geht aus ihr hervor, wenn man in selbe setzt:

$$x y'' + (x - a - b) y' - a y = 0$$

gebracht werden können.

*) Weiler in seiner Abhandlung über Integration von Differentialgleichungen im LI. Bande von Crelle's Journal zeigt, wie alle Gleichungen der Form (1) durch Einführung neuer Variablen auf die Form

statt m die Zahl	0
" A " "	$\frac{1}{6}$
" B " "	$\frac{1}{6}$
" α " "	$-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{-a_2}}$
" β " "	$+\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{-a_2}}$
" x " Variable	ξ
" y " "	z

es ist daher das vollständige Integrale der Gleichung (152) vermöge der Formel (31)

$$z = C_1 \int_{-\frac{2}{3\sqrt{-a_2}}}^{+\frac{2}{3\sqrt{-a_2}}} e^{u\xi} \left(u^2 + \frac{4}{9a_2}\right)^{-\frac{5}{6}} du + C_2 \xi^{\frac{2}{3}} \int_{-\frac{2}{3\sqrt{-a_2}}}^{+\frac{2}{3\sqrt{-a_2}}} e^{u\xi} \left(u^2 + \frac{4}{9a_2}\right)^{-\frac{1}{6}} du$$

Diese Integrale lassen sich vereinfachen, wenn man für u eine neue Variable w einführt mittelst folgender Gleichung:

$$u = \frac{2w}{3\sqrt{-a_2}}$$

man erhält alsdann:

$$z = L_1 \int_{-1}^{+1} e^{\frac{2w\xi}{3\sqrt{-a_2}}} (1 - w^2)^{-\frac{5}{6}} dw + L_2 \xi^{\frac{2}{3}} \int_{-1}^{+1} e^{\frac{2w\xi}{3\sqrt{-a_2}}} (1 - w^2)^{-\frac{1}{6}} dw$$

und wenn man der Kürze halber $\frac{2}{3\sqrt{-a_2}} = \mu$ setzt:

$$z = L_1 \int_{-1}^{+1} e^{\mu w \xi} (1 - w^2)^{-\frac{5}{6}} dw + L_2 \xi^{\frac{2}{3}} \int_{-1}^{+1} e^{\mu w \xi} (1 - w^2)^{-\frac{1}{6}} dw$$

Zweiter Abschnitt.

(Enthaltend eine Sammlung von Beispielen, die sich auf die Integration der im I. Abschnitte behandelten Differentialgleichungen zurückführen lässt.)

§. 69.

Es sei zu integrieren die Riccati'sche Differentialgleichung:

$$y'' = x^m y \quad (153)$$

Dieselbe ist in den beiden Specialfällen $m = 0$ und $m = -2$ sehr leicht integrirbar.

Für $m = 0$ hat man:

$$y'' = y$$

und ihr genügt:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Ferner hat man für $m = -2$ die Gleichung:

$$x^2 y'' = y$$

und ihr genügt

$$y = C_1 x^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})} + C_2 x^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})}$$

in beiden Fällen bedeuten C_1 und C_2 willkürliche Constante.

Hat m einen andern Werth als 0 oder -2 , so setze man:

$$x = \xi^n$$

man erhält dann:

$$y' = \frac{1}{n \xi^{n-1}} \frac{dy}{d\xi}$$

$$y'' = \frac{1}{n^2 \xi^{2n-2}} \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{1-n}{n^2 \xi^{2n-1}} \cdot \frac{dy}{d\xi}$$

und diese Werthe in (153) substituirt, führen, von Brüchen befreit, auf die Gleichung:

$$\xi \frac{d^2 y}{d\xi^2} + (1-n) \frac{dy}{d\xi} = n^2 \xi^{mn+2n-1} y \quad (154)$$

welche sich vereinfacht in zwei Fällen, nämlich erstens, wenn man

$$mn + 2n - 1 = 0$$

setzt. In diesem Falle ist

$$n = \frac{1}{m+2}$$

und man erhält die Gleichung:

$$\xi \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{m+1}{m+2} \frac{dy}{d\xi} - \frac{1}{(m+2)^2} y = 0$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$y = \frac{d^{\frac{m}{2m+4}}}{d\xi^{\frac{m}{2m+4}}} \left[C_1 e^{+\frac{2\sqrt{\xi}}{m+2}} + C_2 e^{-\frac{2\sqrt{\xi}}{m+2}} \right]$$

vorausgesetzt, dass

$$\frac{m}{2m+4}$$

eine reelle, ganze positive Zahl ist, oder es ist

$$y = \xi^{\frac{1}{m+2}} \frac{d^{\frac{m+4}{2m+4}}}{d\xi^{\frac{m+4}{2m+4}}} \left[C_1 e^{+\frac{2\sqrt{\xi}}{m+2}} + C_2 e^{-\frac{2\sqrt{\xi}}{m+2}} \right]$$

vorausgesetzt, dass

$$\frac{m+4}{2m+4}$$

eine reelle, ganze positive Zahl ist. C_1 und C_2 bedeuten willkürliche Constante.

Die Gleichung (154) vereinfacht sich zweitens, wenn man

$$mn + 2n - 1 = 1$$

d. h. wenn man

$$n = \frac{2}{m+2}$$

setzt, denn man erhält alsdann die Gleichung:

$$\xi \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{m}{m+2} \frac{dy}{d\xi} - \frac{4}{(m+2)^2} \xi y = 0 \quad (155)$$

welche ein specieller Fall der Gleichung (14) ist; (siehe Petzval's Werk: „Integration der linearen Differentialgleichungen“ I. Band, S. 107) und aus ihr hervorgeht, wenn man in derselben setzt:

statt m die Zahl	0
„ A „ „	$\frac{m}{2(m+2)}$
„ B „ „	$\frac{m}{2(m+2)}$
„ α „ „	$-\frac{2}{m+2}$
„ β „ „	$+\frac{2}{m+2}$
„ x „ Variable	ξ

Die Gleichung (155) haben wir aber in allen Fällen integrieren gelehrt, also ist auch die Riccati'sche Gleichung in allen Fällen integrirbar.

§. 70.

Ist m eine beliebige positive Zahl, so sind A und B positive echte Brüche, und das Integrale der Gleichung (155) ergibt sich aus (31) und ist:

$$y = C_1 \int_{-\frac{2}{m+2}}^{+\frac{2}{m+2}} e^{u\xi} \left[u^2 - \frac{4}{(m+2)^2} \right]^{-\frac{m+4}{2(m+2)}} du + \\ + C_2 \xi^{\frac{2}{m+2}} \int_{-\frac{2}{m+2}}^{+\frac{2}{m+2}} e^{u\xi} \left[u^2 - \frac{4}{(m+2)^2} \right]^{-\frac{m}{2(m+2)}} du$$

Schreibt man für ξ seinen Werth $x^{\frac{m}{2}+1}$, und führt man für u eine neue Variable v ein, mittelst der Substitution:

$$u = \frac{2v}{m+2}$$

so erhält man:

$$y = L_1 \int_{-1}^{+1} e^{\frac{2v}{m+2} \cdot x^{\frac{m}{2}+1}} (1-v^2)^{-\frac{m+4}{2(m+2)}} dv + \\ + L_2 x \int_{-1}^{+1} e^{\frac{2v}{m+2} \cdot x^{\frac{m}{2}+1}} (1-v^2)^{-\frac{m}{2(m+2)}} dv \quad (156)$$

So ist z. B. das Integrale der Gleichung

$$y'' = xy$$

folgendes:

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} e^{\frac{2u}{3} \cdot xVx} (1-u^2)^{-\frac{5}{6}} du + C_2 x \int_{-1}^{+1} e^{\frac{2u}{3} \cdot xVx} (1-u^2)^{-\frac{1}{6}} du,$$

so ist ferner das Integrale der Gleichung

$$y'' = x^2 y$$

nachstehendes:

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} e^{\frac{u}{2} \cdot x^2} (1-u^2)^{-\frac{3}{4}} du + C_2 x \int_{-1}^{+1} e^{\frac{u}{2} \cdot x^2} (1-u^2)^{-\frac{1}{4}} du$$

und das Integrale der Gleichung

$$y'' = x^3 y$$

ist:

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} e^{\frac{2u}{5} \cdot x^2 V x} (1 - u^2)^{-\frac{7}{10}} du + C_2 x \int_{-1}^{+1} e^{\frac{2u}{5} \cdot x^2 V x} (1 - u^2)^{-\frac{3}{10}} du$$

u. ff.

§. 71.

Ist die zu integrirende Riccati'sche Gleichung

$$x y'' = y \quad (157)$$

d. h. ist $m = -1$, so hat die Gleichung (155) Werthe von A und B , die negativ sind.

Setzt man in (157)

$$x = \xi^2$$

so erhält man:

$$\xi \frac{d^2 y}{d \xi^2} - \frac{d y}{d \xi} - 4 \xi y = 0$$

Da für diese Gleichung

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}$$

ist, so setze man nach §. 19

$$y = \xi^2 z$$

man erhält sodann:

$$\xi \frac{d^2 z}{d \xi^2} + 3 \frac{d z}{d \xi} - 4 \xi z = 0 \quad (158)$$

Diese Gleichung ist wieder ein specieller Fall der Gleichung (14) und geht aus ihr hervor, wenn man in selbe setzt:

statt m	die Zahl	0
" A	" "	$\frac{3}{2}$
" B	" "	$\frac{3}{2}$
" α	" "	-2
" β	" "	+2
" y	Variable	z
" x	" "	ξ

Da die beiden Argumente der Gleichung (158)

$$A = \frac{3}{2}, \quad B = \frac{3}{2}$$

sind, so hängt das Integrale der Gleichung (158), vermöge des im §. 17 aufgestellten Lehrsatzes, von dem Integrale der Gleichung

$$\xi \frac{d^2 z_1}{d \xi^2} + \frac{d z_1}{d \xi} - 4 \xi z_1 = 0 \quad (159)$$

ab, für welches

$$\begin{aligned} m &= 0 \\ A &= \frac{1}{2} \\ B &= \frac{1}{2} \\ \alpha &= -2 \\ \beta &= +2 \end{aligned}$$

und somit $a = 1$, $b = 1$ ist. Es ist nämlich:

$$z = e^{2\xi} \frac{d}{d\xi} \left[e^{-4\xi} \frac{d}{d\xi} (e^{2\xi} z_1) \right] \quad (160)$$

und z_1 ist nach der Formel (34) von nachstehender Form:

$$z_1 = C_1 \int_{-2}^{+2} e^{u\xi} (u^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} du + C_2 \int_{-2}^{+2} e^{u\xi} (u^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} \log [\xi (u^2 - 4)] du \quad (161)$$

Aus (160) folgt:

$$z = z_1'' - 4z_1$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} z_1' &= C_1 \int_{-2}^{+2} u e^{u\xi} (u^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} du + \\ &+ C_2 \int_{-2}^{+2} u e^{u\xi} (u^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} \log [\xi (u^2 - 4)] du + \frac{C_2}{\xi} \int_{-2}^{+2} e^{u\xi} (u^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} du \end{aligned}$$

ferner:

$$\begin{aligned} z_1'' &= C_1 \int_{-2}^{+2} u^2 e^{u\xi} (u^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} du + \\ &+ C_2 \int_{-2}^{+2} u^2 e^{u\xi} (u^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} \log [\xi (u^2 - 4)] du + \\ &+ \frac{2C_2}{\xi} \int_{-2}^{+2} u e^{u\xi} (u^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} du - \frac{C_2}{\xi^2} \int_{-2}^{+2} e^{u\xi} (u^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} du \end{aligned}$$

folglich hat man:

$$\begin{aligned} z &= C_1 \int_{-2}^{+2} e^{u\xi} \sqrt{u^2 - 4} du + \\ &+ C_2 \int_{-2}^{+2} e^{u\xi} \sqrt{u^2 - 4} \left[\log [\xi (u^2 - 4)] + \frac{2}{\xi} \cdot \frac{u}{u^2 - 4} - \frac{1}{\xi^2} \cdot \frac{1}{u^2 - 4} \right] du \end{aligned}$$

Daraus folgt zunächst:

$$\begin{aligned} y &= C_1 \xi^2 \int_{-2}^{+2} e^{u\xi} \sqrt{u^2 - 4} du + \\ &+ C_2 \int_{-2}^{+2} e^{u\xi} \sqrt{u^2 - 4} \left[\xi^2 \log [\xi (u^2 - 4)] + \frac{2u\xi}{u^2 - 4} - \frac{1}{u^2 - 4} \right] du \end{aligned}$$

und da

$$\xi = \sqrt{x}$$

ist, so hat man als vollständiges Integrale der Gleichung

$$x y'' = y \quad (157)$$

folgenden Ausdruck:

$$y = C_1 x \int_{-2}^{+2} e^{u\sqrt{x}} \sqrt{u^2 - 4} du + \quad (162)$$

$$+ C_2 \int_{-2}^{+2} e^{u\sqrt{x}} \sqrt{u^2 - 4} \left[x \log [(u^2 - 4)\sqrt{x}] + \frac{2u\sqrt{x} - 1}{u^2 - 4} \right] du$$

in welchem C_1 und C_2 willkürliche Constante bedeuten.

§. 72.

Für die Differentialgleichung

$$x^3 y'' = y$$

ist $m = -3$. Setzt man daher

$$x = \xi^{-2}$$

so geht die Gleichung (155) über in:

$$\xi \frac{d^2 y}{d\xi^2} + 3 \frac{dy}{d\xi} - 4\xi y = 0 \quad (158)$$

Diese Gleichung haben wir bereits im vorhergehenden §. integriert; wir erhielten:

$$y = C_1 \int_{-2}^{+2} e^{u\xi} \sqrt{u^2 - 4} du +$$

$$+ C_2 \int_{-2}^{+2} e^{u\xi} \sqrt{u^2 - 4} \left[\log [\xi(u^2 - 4)] + \frac{2u}{\xi(u^2 - 4)} - \frac{1}{\xi^2(u^2 - 4)} \right] du$$

folglich ist, da aus $x = \xi^{-2}$, $\xi = \frac{1}{\sqrt{x}}$ folgt

$$y = C_1 \int_{-2}^{+2} e^{\frac{u}{\sqrt{x}}} \sqrt{u^2 - 4} du +$$

$$+ C_2 \int_{-2}^{+2} e^{\frac{u}{\sqrt{x}}} \sqrt{u^2 - 4} \left[\log \frac{u^2 - 4}{\sqrt{x}} + \frac{2u\sqrt{x} - x}{u^2 - 4} \right] du$$

§. 73.

Die Differentialgleichung

$$x^4 y'' = y$$

geht durch die Substitution $x = \frac{1}{\xi}$ über in:

$$\xi \frac{d^2 y}{d \xi^2} + 2 \frac{d y}{d \xi} - \xi y = 0$$

Diese Gleichung ist ein specieller Fall der Gleichung (14) und geht aus ihr hervor, wenn man in derselben setzt:

statt m	die Zahl	0
" A	" "	1
" B	" "	1
" α	" "	1
" β	" "	-1

folglich hat man nach der Formel (53)

$$y = C_1 \cdot \frac{e^{-\xi}}{\xi} + C_2 \cdot \frac{e^{+\xi}}{\xi}$$

Führt man für ξ seinen Werth $\frac{1}{x}$ ein, so erhält man:*)

$$y = x \left(C_1 e^{-\frac{1}{x}} + C_2 e^{+\frac{1}{x}} \right)$$

welches Integrale auch Euler fand (siehe II. Band seiner vollständigen Anleitung zur Integralrechnung §. 902).

§. 74.

Ist $m = -5$, oder ist $m = -6$, oder ist $m = -7$, oder ist $m = -8$ u. s. w., so sind in der Gleichung (155) A und B wieder positive echte Brüche, und die Formel (156) liefert in diesen Fällen das vollständige Integrale. So hat die Gleichung

$$x^5 y'' = y$$

das Integrale:

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} e^{-\frac{2u}{3x\sqrt{x}}} (1-u^2)^{-\frac{1}{6}} du + C_2 x \int_{-1}^{+1} e^{-\frac{2u}{3x\sqrt{x}}} (1-u^2)^{-\frac{5}{6}} du$$

so hat ferner die Gleichung:

$$x^6 y'' = y$$

*) Ich habe in den Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften am 7. October 1857 die Differentialgleichung

$$x^{2m} y^{(m)} = \alpha^m y$$

integriert und gefunden, dass

$$y = x^{m-1} \left[C_1 e^{-\frac{\mu \alpha}{x}} + C_2 e^{-\frac{\mu^2 \alpha}{x}} + C_3 e^{-\frac{\mu^3 \alpha}{x}} + \dots + C_m e^{-\frac{\mu^m \alpha}{x}} \right]$$

ist, unter α eine bestimmte Constante, und unter $C_1, C_2, C_3 \dots C_m$ willkürliche Constante verstanden. μ bedeutet eine primitive Wurzel der Gleichung $\mu^m = 1$.

das Integrale:

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} e^{-\frac{u}{2x^2}} (1-u^2)^{-\frac{1}{4}} du + C_2 x \int_{-1}^{+1} e^{-\frac{u}{2x^2}} (1-u^2)^{-\frac{3}{4}} du$$

und die Gleichung

$$x^7 y'' = y$$

hat das Integrale:

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} e^{-\frac{2u}{5x^2\sqrt{x}}} (1-u^2)^{-\frac{3}{10}} du + C_2 x \int_{-1}^{+1} e^{-\frac{2u}{5x^2\sqrt{x}}} (1-u^2)^{-\frac{7}{10}} du$$

u. s. f.

§. 75.

Die Riccati'sche Gleichung

$$y'' = x^m y$$

lässt sich, im Falle m eine ganze positive Zahl ist, noch auf andere Art, und zwar mittelst mehrfacher Integrale integrieren, und diese Art rührt von Kummer her. Kummer hat nämlich im XIX. Bande von Crelle's Journal gezeigt, dass die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y \quad (163)$$

für ganze und positive Werthe von m und n von der Integration folgender andern Differentialgleichung

$$\frac{d^{n+1} z}{dx^{n+1}} = x^{m-1} z \quad (164)$$

abhängt. Ist nämlich das vollständige Integrale der Gleichung (164) bekannt, und ist dasselbe

$$z = \psi(x)$$

so ist das vollständige Integrale der Gleichung (163) gegeben durch folgendes bestimmte Integral:

$$y = \int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux) du \quad (165)$$

wenn man nur zwischen den $n+1$ willkürlichen Constanten, die in dem vollständigen Integrale der Gleichung (164) auftreten, eine gewisse Bedingungs-gleichung einführt.

Um dies zu beweisen, differenzire man die Gleichung (163), man erhält dann:

$$\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = x^m \frac{dy}{dx} + m x^{m-1} y \quad (166)$$

und wenn man hierin die nachstehenden Werthe von y , $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}}$ einführt, nämlich:

$$y = \int_0^{\infty} u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux) du \quad (165)$$

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^{\infty} u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi'(ux) du$$

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \int_0^{\infty} u^{m+n} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi^{(n+1)}(ux) du$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} u^{m+n} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi^{(n+1)}(ux) du = \\ & = x^m \int_0^{\infty} u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi'(ux) du + mx^{m-1} \int_0^{\infty} u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux) du \end{aligned} \quad (167)$$

Nun ist aber vermöge der Gleichung (164)

$$\psi^{(n+1)}(x) = x^{m-1} \psi(x)$$

folglich ist:

$$\psi^{(n+1)}(ux) = u^{m-1} x^{m-1} \psi(ux)$$

und wenn man in (167) diesen so eben aufgestellten Werth von $\psi^{(n+1)}(ux)$ einführt, so erhält man:

$$\begin{aligned} & x^{m-1} \int_0^{\infty} u^{2m+n-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux) du = \\ & = x^m \int_0^{\infty} u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi'(ux) du + mx^{m-1} \int_0^{\infty} u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux) du \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist durch x^{m-1} abkürzbar und lässt sich sodann so schreiben:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} [u^{2m+n-1} \psi(ux) - xu^m \psi'(ux) - mu^{m-1} \psi(ux)] du = 0$$

Nun ist identisch:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} [u^{2m+n-1} \psi(ux) - xu^m \psi'(ux) - mu^{m-1} \psi(ux)] du = \\ & = -u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux) \end{aligned}$$

folglich ist dieses Integrale, zwischen den Grenzen 0 und ∞ genommen, gleich 0, weil der Ausdruck:

$$u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux)$$

Null wird, sowohl für $u = \infty$ als auch für $u = 0$.

Hieraus folgt also, dass das in (165) stehende y das vollständige Integrale der Gleichung (166) ist; es wird also durch dasselbe y der Gleichung (163) genügt, wenn nur zwischen den in y vorkommenden Constanten eine gewisse Bedingungsgleichung statuirt wird.

§. 76.

Ich will nun die Gleichung

$$\frac{d^n z}{d x^n} = x z \quad (168)$$

integriren. Mittelst der Methode von Laplace erhält man:

$$z = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V du$$

woselbst

$$V = \frac{1}{U_1} \cdot e^{\int \frac{U_0}{U_1} du}$$

ist, und die Integrationsgrenzen sind solche constante Zahlen, welche sich aus der Auflösung der Gleichung

$$e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} = 0$$

ergeben. U_0 und U_1 haben für die Gleichung (168) nachstehende Bedeutung:

$$U_0 = u^n, \quad U_1 = -1$$

demnach ist

$$z = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux - \frac{u^{n+1}}{n+1}} du$$

und die Gleichung, die zur Bestimmung der Integrationsgrenzen dient, lautet:

$$e^{ux - \frac{u^{n+1}}{n+1}} = 0$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$u^{n+1} = \infty$$

Nennt man nun

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots \mu_{n+1}$$

die $n+1$ Wurzeln der Gleichung

$$\mu^{n+1} = 1$$

so sind die $n + 1$ Wurzeln der Gleichung $\mu^{n+1} = 1$

$$\mu_1 \infty, \quad \mu_2 \infty, \quad \mu_3 \infty \dots \mu_{n+1} \infty$$

und man kann nach Petzval*) das Integrale der Gleichung (168) so schreiben:

$$z = C_1 \int_0^{\mu_1 \infty} e^{ux - \frac{u^{n+1}}{n+1}} du + C_2 \int_0^{\mu_2 \infty} e^{ux - \frac{u^{n+1}}{n+1}} du + \dots + \\ + C_{n+1} \int_0^{\mu_{n+1} \infty} e^{ux - \frac{u^{n+1}}{n+1}} du \quad (169)$$

vorausgesetzt, dass $C_1, C_2, C_3 \dots C_{n+1}$ willkürliche Constante sind, deren Summe gleich Null ist.

Um sich von der Richtigkeit dieses Integrales zu überzeugen, substituirt man den in (169) aufgestellten Werth von y in die Differentialgleichung (168).

Man erhält sodann:

$$\frac{d^n z}{d x^n} - x z = C_1 \int_0^{\mu_1 \infty} (u^n - x) e^{ux - \frac{u^{n+1}}{n+1}} du + \\ + C_2 \int_0^{\mu_2 \infty} (u^n - x) e^{ux - \frac{u^{n+1}}{n+1}} du + \\ + \dots \dots \dots \\ + C_{n+1} \int_0^{\mu_{n+1} \infty} (u^n - x) e^{ux - \frac{u^{n+1}}{n+1}} du$$

Nun lassen sich sämtliche hier stehenden Integrationen wirklich ausführen, denn es ist identisch

$$\int (u^n - x) e^{ux - \frac{u^{n+1}}{n+1}} du = - e^{ux - \frac{u^{n+1}}{n+1}}$$

folglich hat man:

*) Petzval's Integration der linearen Differentialgleichungen, I. Band, Seite 54.

$$\frac{d^n z}{dx^n} - xz = -C_1 \left\{ e^{ux - \frac{u^{n+1}}{n+1}} \right\}_0^{\mu_1 \infty} - C_2 \left\{ e^{ux - \frac{u^{n+1}}{n+1}} \right\}_0^{\mu_2 \infty} - \dots - C_{n+1} \left\{ e^{ux - \frac{u^{n+1}}{n+1}} \right\}_0^{\mu_{n+1} \infty}$$

Führt man nun in die eingeklammerten Ausdrücke statt u die obern Grenzwerte ein, so verschwinden die Substitutionsresultate; führt man sodann statt u die untern Grenzwerte ein, so erhält man

$$-C_1 - C_2 - \dots - C_{n+1}$$

und da dies gleich Null sein soll, so leistet der Ausdruck (169) wirklich der Gleichung (168) Genüge.

Das in (169) stehende Integrale der Gleichung (168) lässt sich vereinfachen. Führt man nämlich im ersten Integrale für u eine neue Variable v ein mittelst der Substitution $u = \mu_1 v$, ferner im zweiten Integrale für u die neue Variable v mittelst der Substitution $u = \mu_2 v$ etc. und setzt man im letzten Integrale $u = \mu_{n+1} v$, so erhält man, unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$\mu_1^{n+1} = 1, \mu_2^{n+1} = 1, \dots, \mu_{n+1}^{n+1} = 1$$

folgenden Werth von z :

$$z = \int_0^\infty e^{-\frac{v^{n+1}}{n+1}} [\mu_1 C_1 e^{\mu_1 v x} + \mu_2 C_2 e^{\mu_2 v x} + \dots + \mu_{n+1} C_{n+1} e^{\mu_{n+1} v x}] dv \quad (170)$$

und dies ist das vollständige Integrale der vorgelegten Differentialgleichung, vorausgesetzt, dass $C_1, C_2 \dots C_{n+1}$ willkürliche, bloß an die Bedingung

$$C_1 + C_2 + \dots + C_{n+1} = 0$$

gebundene Constante sind, und dass $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_{n+1}$ die $n+1$ Wurzeln der Gleichung

$$\mu^{n+1} = 1$$

sind.

§. 77.

Wir wollen nun integrieren die Differentialgleichung

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = x^2 y \quad (171)$$

Nach dem Satze von Kummer hat man vorerst das Integrale der Gleichung

$$\frac{d^n z}{dx^n} = xz$$

aufzustellen. Nennt man dasselbe

$$z = \psi(x)$$

so ist nach dem vorhergehenden §:

$$\psi(x) = \int_0^\infty e^{-\frac{v^{n+1}}{n+1}} (\mu_1 C_1 e^{\mu_1 v x} + \mu_2 C_2 e^{\mu_2 v x} + \dots + \mu_{n+1} C_{n+1} e^{\mu_{n+1} v x}) dv \quad (170)$$

sodann ist:

$$\psi(ux) = \int_0^\infty e^{-\frac{v^{n+1}}{n+1}} (\mu_1 C_1 e^{\mu_1 u v x} + \mu_2 C_2 e^{\mu_2 u v x} + \dots + \mu_{n+1} C_{n+1} e^{\mu_{n+1} u v x}) du$$

und folglich ist:

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1} + v^{n+1}}{n+1}} u (\mu_1 C_1 e^{\mu_1 u v x} + \mu_2 C_2 e^{\mu_2 u v x} + \dots + \mu_{n+1} C_{n+1} e^{\mu_{n+1} u v x}) du dv \quad (172)$$

Wird dieses y sodann $n-1$ mal differenziert, so muss der erhaltene Ausdruck für $x=0$ selbst Null werden, weil die Gleichung (171) auch für $x=0$ auf $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = 0$ führt. Nun ist:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1} + v^{n+1}}{n+1}} u^n v^{n-1} (\mu_1^n C_1 e^{\mu_1 u v x} + \mu_2^n C_2 e^{\mu_2 u v x} + \dots + \mu_{n+1}^n C_{n+1} e^{\mu_{n+1} u v x}) du dv$$

für $x=0$ geht dies über in:

$$\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right)_0 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1} + v^{n+1}}{n+1}} u^n v^{n-1} (\mu_1^n C_1 + \mu_2^n C_2 + \dots + \mu_{n+1}^n C_{n+1}) du dv$$

und dies wird Null, wenn

$$\mu_1^n C_1 + \mu_2^n C_2 + \dots + \mu_{n+1}^n C_{n+1} = 0$$

wird.

Aus der hier geführten Analyse folgt als Integrale der Gleichung

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = x^2 y \quad (171)$$

folgender Werth:

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1} + v^{n+1}}{n+1}} u (\mu_1 C_1 e^{\mu_1 u v x} + \mu_2 C_2 e^{\mu_2 u v x} + \dots + \mu_{n+1} C_{n+1} e^{\mu_{n+1} u v x}) du dv \quad (172)$$

wenn nur zwischen den $n+1$ willkürlichen Constanten $C_1, C_2 \dots C_{n+1}$ folgende zwei Bedingungsgleichungen stattfinden:

$$C_1 + C_2 + \dots + C_{n+1} = 0$$

$$\mu_1^n C_1 + \mu_2^n C_2 + \dots + \mu_{n+1}^n C_{n+1} = 0$$

und $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_{n+1}$ die Wurzeln der Gleichung

$$\mu^{n+1} = 1$$

sind.

§. 78.

Wir wollen nun die Gleichung

$$\frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}} = x^3 y \quad (173)$$

integriren. Nach Kummer ist das Integrale derselben abhängig von dem Integrale der Gleichung:

$$\frac{d^{n-1} z}{d x^{n-1}} = x^2 z \quad (171)$$

Nennt man das Integrale dieser Gleichung $z = \psi(x)$, so ist nach dem vorhergehenden §:

$$\psi(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{v^{n+1} + w^{n+1}}{n+1}} v (\mu_1 C_1 e^{\mu_1 v w x} + \mu_2 C_2 e^{\mu_2 v w x} + \dots + \mu_{n+1} C_{n+1} e^{\mu_{n+1} v w x}) dv dw$$

und demnach ist nach Formel (165):

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty u^2 v e^{-\frac{u^{n+1} + v^{n+1} + w^{n+1}}{n+1}} (\mu_1 C_1 e^{\mu_1 u v w x} + \mu_2 C_2 e^{\mu_2 u v w x} + \dots + \mu_{n+1} C_{n+1} e^{\mu_{n+1} u v w x}) du dv dw \quad (174)$$

Wird dieses y sodann $n-2$ mal differenzirt, so muss der erhaltene Ausdruck für $x=0$ selbst Null werden, weil die Gleichung (173) auch für $x=0$ auf $\frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}} = 0$ führt. Nun ist:

$$\frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}} = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1} + v^{n+1} + w^{n+1}}{n+1}} u^n v^{n-1} w^{n-2} (\mu_1^{n-1} C_1 e^{\mu_1 u v w x} + \mu_2^{n-1} C_2 e^{\mu_2 u v w x} + \dots + \mu_{n+1}^{n-1} C_{n+1} e^{\mu_{n+1} u v w x}) du dv dw$$

dies geht für $x=0$ über in:

$$\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)_0 = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1}+v^{n+1}+w^{n+1}}{n+1}} u^n v^{n-1} w^{n-2} (\mu_1^{n-1} C_1 + \mu_2^{n-1} C_2 + \dots + \mu_{n+1}^{n-1} C_{n+1}) du dv dw$$

und dies wird Null, wenn

$$\mu_1^{n-1} C_1 + \mu_2^{n-1} C_2 + \dots + \mu_{n+1}^{n-1} C_{n+1} = 0$$

wird.

Es ist somit das Integrale der Gleichung (173)

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty u^2 v e^{-\frac{u^{n+1}+v^{n+1}+w^{n+1}}{n+1}} (\mu_1 C_1 e^{\mu_1 uvwx} + \mu_2 C_2 e^{\mu_2 uvwx} + \dots + \mu_{n+1} C_{n+1} e^{\mu_{n+1} uvwx}) du dv dw \quad (174)$$

falls nur zwischen den Constanten $C_1, C_2, \dots, C_{n+1}$ folgende drei Bedingungen-
gleichungen obwalten:

$$C_1 + C_2 + \dots + C_{n+1} = 0$$

$$\mu_1^n C_1 + \mu_2^n C_2 + \dots + \mu_{n+1}^n C_{n+1} = 0$$

$$\mu_1^{n-1} C_1 + \mu_2^{n-1} C_2 + \dots + \mu_{n+1}^{n-1} C_{n+1} = 0$$

und $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n+1}$ die Wurzeln der Gleichung

$$\mu^{n+1} = 1$$

sind.

§. 79.

Aus den drei letzten Paragraphen sieht man, dass das Integrale der Gleichung

$$y'' = xy \quad (146)$$

folgendes ist:

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} (\mu_1 C_1 e^{\mu_1 ux} + \mu_2 C_2 e^{\mu_2 ux} + \mu_3 C_3 e^{\mu_3 ux}) du \quad (147)$$

in welchem C_1, C_2, C_3 willkürliche Constante bedeuten, zwischen welchen die Gleichung

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

stattfindet, und μ_1, μ_2, μ_3 die drei Wurzeln der Gleichung

$$\mu^3 = 1$$

sind.

Ferner ist das Integrale der Gleichung

$$y'' = x^2 y \quad (175)$$

nachstehendes:

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} u (\mu_1 C_1 e^{\mu_1 uvx} + \mu_2 C_2 e^{\mu_2 uvx} + \mu_3 C_3 e^{\mu_3 uvx} + \mu_4 C_4 e^{\mu_4 uvx}) du dv \quad (176)$$

in diesem Integrale bedeuten C_1, C_2, C_3, C_4 willkürliche Constante, zwischen welchen die Gleichungen stattfinden:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 &= 0 \\ \mu_1^3 C_1 + \mu_2^3 C_2 + \mu_3^3 C_3 + \mu_4^3 C_4 &= 0 \end{aligned} \quad (177)$$

und in welchem $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ die vier Wurzeln der Gleichung

$$\mu^4 = 1$$

sind. Auf gleiche Weise hat man für die Gleichung

$$y'' = x^3 y$$

das Integrale:

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^5+v^5+w^5}{5}} u^2 v (\mu_1 C_1 e^{\mu_1 uvwx} + \mu_2 C_2 e^{\mu_2 uvwx} + \mu_3 C_3 e^{\mu_3 uvwx} + \mu_4 C_4 e^{\mu_4 uvwx} + \mu_5 C_5 e^{\mu_5 uvwx}) du dv dw \quad (178)$$

Hier bedeuten wiederum C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 willkürliche Constante, zwischen denen folgende drei Gleichungen stattfinden:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 &= 0 \\ \mu_1^3 C_1 + \mu_2^3 C_2 + \mu_3^3 C_3 + \mu_4^3 C_4 + \mu_5^3 C_5 &= 0 \\ \mu_1^4 C_1 + \mu_2^4 C_2 + \mu_3^4 C_3 + \mu_4^4 C_4 + \mu_5^4 C_5 &= 0 \end{aligned}$$

und $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ sind die fünf Wurzeln der Gleichung

$$\mu^5 = 1$$

u. s. f.

§. 80.

Im §. 65 haben wir das in (147) stehende Integrale der Gleichung (146) in unendliche convergente Reihen entwickelt. Auf gleiche Weise lassen sich auch die in (176) und (178) stehenden Integrale in unendliche convergente Reihen entwickeln. Wir wollen dies nun in der That mit dem Integrale der Differentialgleichung

$$y'' = x^2 y \quad (179)$$

thun. Das Integrale dieser Differentialgleichung ist:

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} u (\mu_1 C_1 e^{\mu_1 uvx} + \mu_2 C_2 e^{\mu_2 uvx} + \mu_3 C_3 e^{\mu_3 uvx} + \mu_4 C_4 e^{\mu_4 uvx}) du dv \quad (176)$$

Dieses Integrale lässt sich nun folgendermassen schreiben:

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} u \left[C_1 \mu_1 \left(1 + \mu_1 u v x + \frac{\mu_1^2 u^2 v^2 x^2}{2!} + \frac{\mu_1^3 u^3 v^3 x^3}{3!} + \dots \right) + \right. \\ \left. + C_2 \mu_2 \left(1 + \mu_2 u v x + \frac{\mu_2^2 u^2 v^2 x^2}{2!} + \frac{\mu_2^3 u^3 v^3 x^3}{3!} + \dots \right) + \right. \\ \left. + C_3 \mu_3 \left(1 + \mu_3 u v x + \frac{\mu_3^2 u^2 v^2 x^2}{2!} + \frac{\mu_3^3 u^3 v^3 x^3}{3!} + \dots \right) + \right. \\ \left. + C_4 \mu_4 \left(1 + \mu_4 u v x + \frac{\mu_4^2 u^2 v^2 x^2}{2!} + \frac{\mu_4^3 u^3 v^3 x^3}{3!} + \dots \right) \right] du dv$$

Diese Gleichung lässt sich nun so schreiben:

$$y = (C_1 \mu_1 + C_2 \mu_2 + C_3 \mu_3 + C_4 \mu_4) \int_0^\infty \int_0^\infty u e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} du dv + \\ + (C_1 \mu_1^2 + C_2 \mu_2^2 + C_3 \mu_3^2 + C_4 \mu_4^2) x \int_0^\infty \int_0^\infty u^2 v e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} du dv + \\ + (C_1 \mu_1^3 + C_2 \mu_2^3 + C_3 \mu_3^3 + C_4 \mu_4^3) \frac{x^2}{2!} \int_0^\infty \int_0^\infty u^3 v^2 e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} du dv + \quad (180) \\ + (C_1 \mu_1^4 + C_2 \mu_2^4 + C_3 \mu_3^4 + C_4 \mu_4^4) \frac{x^3}{3!} \int_0^\infty \int_0^\infty u^4 v^3 e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} du dv + \\ + (C_1 \mu_1^5 + C_2 \mu_2^5 + C_3 \mu_3^5 + C_4 \mu_4^5) \frac{x^4}{4!} \int_0^\infty \int_0^\infty u^5 v^4 e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} du dv + \\ + \dots$$

Vermöge der Gleichung $\mu^4 = 1$ ist:

$$1 = \mu^4 = \mu^8 = \mu^{12} = \dots$$

$$\mu = \mu^5 = \mu^9 = \mu^{13} = \dots$$

$$\mu^2 = \mu^6 = \mu^{10} = \mu^{14} = \dots$$

$$\mu^3 = \mu^7 = \mu^{11} = \mu^{15} = \dots$$

ferner hat man:

$$C_1 \mu_1 + C_2 \mu_2 + C_3 \mu_3 + C_4 \mu_4 = C_1 \mu_1^5 + C_2 \mu_2^5 + C_3 \mu_3^5 + C_4 \mu_4^5 = \\ = C_1 \mu_1^9 + C_2 \mu_2^9 + C_3 \mu_3^9 + C_4 \mu_4^9 = \dots \\ C_1 \mu_1^2 + C_2 \mu_2^2 + C_3 \mu_3^2 + C_4 \mu_4^2 = C_1 \mu_1^6 + C_2 \mu_2^6 + C_3 \mu_3^6 + C_4 \mu_4^6 = \\ = C_1 \mu_1^{10} + C_2 \mu_2^{10} + C_3 \mu_3^{10} + C_4 \mu_4^{10} = \dots \\ C_1 \mu_1^3 + C_2 \mu_2^3 + C_3 \mu_3^3 + C_4 \mu_4^3 = C_1 \mu_1^7 + C_2 \mu_2^7 + C_3 \mu_3^7 + C_4 \mu_4^7 = \quad (181) \\ = C_1 \mu_1^{11} + C_2 \mu_2^{11} + C_3 \mu_3^{11} + C_4 \mu_4^{11} = \dots \\ C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = C_1 \mu_1^4 + C_2 \mu_2^4 + C_3 \mu_3^4 + C_4 \mu_4^4 = \\ = C_1 \mu_1^8 + C_2 \mu_2^8 + C_3 \mu_3^8 + C_4 \mu_4^8 = \dots$$

Nennt man nun die in der ersten und zweiten Zeile der Gleichungen (181) stehenden Glieder der Kürze halber B_1 , die in der dritten und vierten Zeile

derselben Gleichungen stehenden Glieder gleich B_2 , und beachtet man, dass die in den folgenden Zeilen stehenden Glieder vermöge der Gleichungen (177) Null sind; setzt man ferner

$$\int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} u^n du = \int_0^\infty e^{-\frac{v^4}{4}} v^n du = A_n$$

so gestattet die Gleichung (180) folgende Aufschreibweise:

$$y = B_1 \left[A_0 A_1 + A_4 A_5 \cdot \frac{x^4}{4!} + A_8 A_9 \cdot \frac{x^8}{8!} + A_{12} A_{13} \cdot \frac{x^{12}}{12!} + \dots \right] + \\ + B_2 \left[A_1 A_2 \cdot x + A_5 A_6 \cdot \frac{x^5}{5!} + A_9 A_{10} \cdot \frac{x^9}{9!} + A_{13} A_{14} \cdot \frac{x^{13}}{13!} + \dots \right]$$

Diese Reihen lassen sich in einfacherer Form darstellen, denn es folgt aus der Gleichung:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx \quad a > 0$$

wenn man in dieselbe

$$x = \frac{u^4}{4} \quad \text{und} \quad a = \frac{m+1}{4} \quad m+1 > 0$$

setzt:

$$4^{\frac{m-3}{4}} \Gamma\left(\frac{m+1}{4}\right) = \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} u^m du = A_m$$

folglich ist:

$$y = B_1 \left[4^{-\frac{5}{4}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{2}{4}\right) + 4^{\frac{3}{4}} \cdot \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \Gamma\left(\frac{6}{4}\right) \cdot \frac{x^4}{4!} + 4^{\frac{11}{4}} \cdot \Gamma\left(\frac{9}{4}\right) \Gamma\left(\frac{10}{4}\right) \cdot \frac{x^8}{8!} + \dots \right] + \\ + B_2 \left[4^{-\frac{3}{4}} \Gamma\left(\frac{2}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) x + 4^{\frac{5}{4}} \cdot \Gamma\left(\frac{6}{4}\right) \Gamma\left(\frac{7}{4}\right) \cdot \frac{x^5}{5!} + 4^{\frac{13}{4}} \cdot \Gamma\left(\frac{10}{4}\right) \Gamma\left(\frac{11}{4}\right) \cdot \frac{x^9}{9!} + \dots \right] +$$

und wenn man die Formel:

$$\Gamma(A+n) = A(A+1)(A+2) \dots (A+n-1) \cdot \Gamma(A) \quad A > 0 \quad (22)$$

berücksichtigt, und die willkürlichen Constanten $4^{-\frac{5}{4}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{2}{4}\right) B_1$ und $4^{-\frac{3}{4}} \Gamma\left(\frac{2}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) B_2$ mit L_1 und L_2 bezeichnet, so hat man:

$$y = L_1 \left[1 + 1.2 \cdot \frac{x^4}{4!} + 1.5.2.6 \cdot \frac{x^8}{8!} + 1.5.9 \cdot 2.6.10 \cdot \frac{x^{12}}{12!} + \dots \right] + \\ + L_2 \left[x + 2.3 \cdot \frac{x^5}{5!} + 2.6.3.7 \cdot \frac{x^9}{9!} + 2.6.10.3.7.11 \cdot \frac{x^{13}}{13!} + \dots \right]$$

Diese Reihen sind convergent für jeden Werth von x , und leisten, wie man sich leicht überzeugen kann, der Gleichung (179) Genüge.

Auf gleiche Weise lässt sich auch das in (178) stehende dreifache Integrale in unendliche convergente Reihen entwickeln.

§. 81.

Die Gleichung

$$y'' = x^m y \quad (153)$$

welche wir so eben für ganze und positive Werthe von m mittelst der Kummer'schen Methode in Form mehrfacher Integrale entwickelten, lässt sich leicht transformiren. Setzt man nämlich in dieselbe:

$$x = \frac{1}{\xi}$$

so erhält man, da

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dy}{d\xi} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{2}{x^3} \cdot \frac{dy}{d\xi} + \frac{1}{x^4} \cdot \frac{d^2y}{d\xi^2} \end{aligned}$$

ist

$$2\xi^3 \frac{dy}{d\xi} + \xi^4 \frac{d^2y}{d\xi^2} = \frac{1}{\xi^m} y$$

oder von Brüchen befreit und geordnet:

$$\xi^{m+4} \frac{d^2y}{d\xi^2} + 2\xi^{m+3} \frac{dy}{d\xi} = y \quad (182)$$

Setzt man hierin

$$y = \frac{z}{\xi}$$

so ist:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\xi} &= \frac{\xi \frac{dz}{d\xi} - z}{\xi^2} \\ \frac{d^2y}{d\xi^2} &= \frac{\xi^2 \frac{d^2z}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dz}{d\xi} + 2z}{\xi^3} \end{aligned}$$

und werden diese Werthe in (182) eingeführt, so erhält man die Gleichung:

$$\xi^{m+4} \frac{d^2z}{d\xi^2} = z$$

welche sich nun ebenfalls für ganze und positive Werthe von m in Form von mehrfachen Integralen integriren lässt.

§. 82.

Setzt man $m = 1$, so ist nach §. 79 das Integrale der Gleichung

$$y'' = xy \quad (146)$$

folgendes:

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} \left[\mu_1 C_1 e^{\mu_1 u \xi} + \mu_2 C_2 e^{\mu_2 u \xi} + \mu_3 C_3 e^{\mu_3 u \xi} \right] du \quad (147)$$

somit ist nach §. 81 das Integrale der Gleichung

$$\xi^5 \frac{d^2 z}{d \xi^2} = z$$

folgendes:

$$z = \xi \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} \left[\mu_1 C_1 e^{\frac{\mu_1 u}{\xi}} + \mu_2 C_2 e^{\frac{\mu_2 u}{\xi}} + \mu_3 C_3 e^{\frac{\mu_3 u}{\xi}} \right] du$$

so ist ferner für $m=2$ das Integrale der Gleichung

$$y'' = x^2 y \quad (179)$$

nachstehendes:

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} u \left[\mu_1 C_1 e^{\mu_1 uvx} + \mu_2 C_2 e^{\mu_2 uvx} + \mu_3 C_3 e^{\mu_3 uvx} + \mu_4 C_4 e^{\mu_4 uvx} \right] du dv$$

folglich ist nach §. 81 das Integrale der Gleichung

$$\xi^6 \frac{d^2 z}{d \xi^2} = z$$

nachstehendes:

$$z = \xi \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} u \left[\mu_1 C_1 e^{\frac{\mu_1 uv}{\xi}} + \mu_2 C_2 e^{\frac{\mu_2 uv}{\xi}} + \mu_3 C_3 e^{\frac{\mu_3 uv}{\xi}} + \mu_4 C_4 e^{\frac{\mu_4 uv}{\xi}} \right] du dv$$

Auf gleiche Weise hat man, da für $m=3$ das Integrale der Gleichung

$$y'' = x^3 y$$

die Form hat:

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^5+v^5+w^5}{5}} u^2 v \left[\mu_1 C_1 e^{\mu_1 uvwx} + \mu_2 C_2 e^{\mu_2 uvwx} + \mu_3 C_3 e^{\mu_3 uvwx} + \right. \\ \left. + \mu_4 C_4 e^{\mu_4 uvwx} + \mu_5 C_5 e^{\mu_5 uvwx} \right] du dv dw$$

als Integrale der Gleichung:

$$\xi^7 \frac{d^2 z}{d \xi^2} = z$$

nachstehendes:

$$z = \xi \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^5+v^5+w^5}{5}} u^2 v \left(\mu_1 C_1 e^{\frac{\mu_1 uvw}{\xi}} + \mu_2 C_2 e^{\frac{\mu_2 uvw}{\xi}} + \mu_3 C_3 e^{\frac{\mu_3 uvw}{\xi}} + \right. \\ \left. + \mu_4 C_4 e^{\frac{\mu_4 uvw}{\xi}} + \mu_5 C_5 e^{\frac{\mu_5 uvw}{\xi}} \right) du dv dw$$

und in allen diesen Integralen haben C und μ die im §. 79 aufgestellten Bedeutungen.

§. 83.

Die Gleichung

$$y'' = x^m (x y' + \lambda y) \quad (183)$$

in welcher m und λ beliebige Zahlen bedeuten, lässt sich so behandeln, wie

wir im §. 69 die Riccati'sche Gleichung behandelt haben. Setzt man nämlich in (183)

$$x = \xi^n$$

so ist

$$y' = \frac{1}{n \xi^{n-1}} \frac{dy}{d\xi}$$

$$y'' = \frac{1}{n^2 \xi^{2n-2}} \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{1-n}{n^2 \xi^{2n-1}} \cdot \frac{dy}{d\xi}$$

und diese Werthe geben, in (183) substituirt:

$$\xi \frac{d^2 y}{d\xi^2} + (1 - n - n \xi^{mn+2n}) \frac{dy}{d\xi} - \lambda n^2 \xi^{mn+2n-1} y = 0$$

Diese Gleichung vereinfacht sich für

$$mn + 2n = 1$$

dann ist

$$n = \frac{1}{m+2}$$

und man erhält die Gleichung:

$$\xi \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{m+1-\xi}{m+2} \frac{dy}{d\xi} - \frac{\lambda}{(m+2)^2} y = 0$$

welche wieder ein specieller Fall der Gleichung (14) ist und aus ihr hervorgeht, wenn man in dieselbe setzt:

statt m die Zahl 0

" A " " $\frac{\lambda}{m+2}$

" B " " $\frac{m+1-\lambda}{m+2}$

" α " " 0

" β " " $\frac{1}{m+2}$

" x die Variable ξ

" y " " z

es ist demnach die Gleichung (183) leicht zu integrieren.

§. 84.

Nehmen wir als Beispiel die Gleichung

$$y'' = x(xy' - ny) \quad (184)$$

in welcher n eine ganze positive Zahl bezeichnen möge. Die Gleichung (184) geht für

$$x^3 = \xi$$

über in:

$$\xi \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{2-\xi}{3} \frac{dy}{d\xi} + \frac{n}{9} y = 0 \quad (185)$$

Diese Gleichung ist ein specieller Fall der Gleichung (14) und geht aus ihr hervor, wenn man in selbe setzt:

statt m	die Zahl	0
" A	" "	$-\frac{n}{3}$
" B	" "	$\frac{n+2}{3}$
" α	" "	0
" β	" "	$\frac{1}{3}$

Das Integrale der Gleichung (185) ergibt sich am einfachsten aus der Formel (32), diese lautet:

$$y = L_1 e^{\alpha \xi} \left[1 + \frac{A}{s} \cdot \gamma \xi + \frac{A(A+1)}{s(s+1)} \cdot \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{s(s+1)(s+2)} \cdot \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right] + \quad (32)$$

$$+ L_2 e^{\alpha \xi} \xi^{1-s} \left[1 + \frac{1-B}{2-s} \cdot \gamma \xi + \frac{(1-B)(2-B)}{(2-s)(3-s)} \cdot \frac{\gamma^2 \xi^2}{2!} + \frac{(1-B)(2-B)(3-B)}{(2-s)(3-s)(4-s)} \cdot \frac{\gamma^3 \xi^3}{3!} + \dots \right]$$

in diesen bedeutet:

$$s = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{3}$$

Sie geht über, wenn man in selbe $\alpha = 0$, $A = -\frac{n}{3}$, $B = \frac{n+2}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$ und $\xi = x^3$ setzt, in:

$$y = L_1 \left[1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{2} \cdot x^3 + \frac{1}{9} \cdot \frac{n(n-3)}{2 \cdot 5} \cdot \frac{x^6}{2!} - \frac{1}{27} \cdot \frac{n(n-3)(n-6)}{2 \cdot 5 \cdot 8} \cdot \frac{x^9}{3!} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{81} \cdot \frac{n(n-3)(n-6)(n-9)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11} \cdot \frac{x^{12}}{4!} - \dots \right] +$$

$$+ L_2 x \left[1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{n-1}{4} \cdot x^3 + \frac{1}{9} \cdot \frac{(n-1)(n-4)}{4 \cdot 7} \cdot \frac{x^6}{2!} - \frac{1}{27} \cdot \frac{(n-1)(n-4)(n-7)}{4 \cdot 7 \cdot 10} \cdot \frac{x^9}{3!} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{81} \cdot \frac{(n-1)(n-4)(n-7)(n-10)}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13} \cdot \frac{x^{12}}{4!} - \dots \right]$$

Die erste Reihe bricht ab, im Falle n eine durch 3 theilbare Zahl ist; die zweite Reihe bricht ab, im Falle $n-1$ durch 3 theilbar ist. Man findet demnach in diesen Fällen stets ein particuläres Integrale in Gestalt eines ganzen algebraischen Polynoms, und kann dann leicht das zweite particuläre Integrale mittelst der bekannten Methode der Variation der willkürlichen Constanten ermitteln.

So hat man z. B. für $n=1$ die Gleichung

$$y'' = x(x y' - y)$$

Ein particuläres Integrale derselben ist:

$$y = L_2 x$$

wofür man auch $y = x$ schreiben kann; das vollständige Integrale lautet:

$$y = x \int e^{\frac{x^3}{3}} \cdot \frac{dx}{x^2}$$

ferner lautet für $n=3$ die vorgelegte Gleichung:

$$y'' = x(x y' - 3 y) \quad (186)$$

ein particuläres Integrale dieser Gleichung ist:

$$y = L_1 (1 - \frac{1}{2} x^3)$$

Dieses lässt sich auch so schreiben:

$$y = x^3 - 2$$

Das vollständige Integrale der Gleichung (186) ist demnach:

$$y = (x^3 - 2) \int e^{\frac{x^3}{3}} \cdot \frac{dx}{(x^3 - 2)^2}$$

Für $n = 4$ hat man die Gleichung:

$$y'' = x(x y' - 4 y) \quad (187)$$

Ein particuläres Integrale dieser Gleichung lautet:

$$y = L_2 x (1 - \frac{1}{4} x^3)$$

wofür man auch

$$y = x^4 - 4 x$$

setzen kann; das vollständige Integrale der Gleichung (187) ist demnach:

$$y = (x^4 - 4 x) \int e^{\frac{x^3}{3}} \cdot \frac{dx}{(x^4 - 4 x)^2}$$

u. s. f.

§. 85.

Die Integration der Gleichung

$$y'' = x(x y' - n y) \quad (184)$$

haben wir noch für den Fall zu erledigen, in welchem

$$n = 2, 5, 8, 11, 14, \dots$$

ist, und dies soll nun geschehen.

Betrachten wir hier den einfachsten Fall, in welchem $n = 2$ ist, und somit die vorgelegte Gleichung die Gestalt

$$y'' = x(x y' - 2 y) \quad (188)$$

hat. Sie geht für

$$x^3 = \xi$$

über in:

$$\xi \frac{d^2 y}{d \xi^2} + \frac{2 - \xi}{3} \frac{d y}{d \xi} + \frac{2}{9} y = 0 \quad (189)$$

Sie ist ein specieller Fall der Gleichung (14) und geht aus ihr hervor, wenn man in derselben setzt:

$$m = 0, \quad A = -\frac{2}{3}, \quad B = \frac{4}{3}, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{3}$$

Aus diesen Gleichungen sieht man, dass A und B Zahlen sind von verschiedenem Zeichen. Die Integration der Gleichung (189) wird am einfachsten durchgeführt mittelst der im §. 21 auseinandergesetzten Methode. Zu diesem Zwecke differenzire ich die Gleichung (189) und erhalte hiedurch nachstehende Gleichung:

$$\xi \frac{d^3 y}{d \xi^3} + \frac{5 - \xi}{3} \frac{d^2 y}{d \xi^2} - \frac{1}{9} \frac{d y}{d \xi} = 0$$

Setzt man

$$\frac{d y}{d \xi} = z$$

so erhält man die Gleichung

$$\xi \frac{d^2 z}{d\xi^2} + \frac{5-\xi}{3} \frac{dz}{d\xi} - \frac{1}{9} z = 0 \quad (190)$$

welche nun wieder ein specieller Fall der Gleichung (14) ist und aus ihr hervorgeht, wenn man in selbe setzt:

$$m = 0, \quad A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{4}{3}, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{3}$$

In der Gleichung (190) sind die beiden Argumente A und B positiv; wären dieselben zugleich kleiner als 1, so könnte man augenblicklich ihr vollständiges Integrale aufschreiben. Da aber $B > 1$, so construiren man eine Differentialgleichung der Form (14), für welche

$$m = 0, \quad A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{3}, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{3}$$

ist. Diese Gleichung lautet:

$$\xi \frac{d^2 Z}{d\xi^2} + \frac{2-\xi}{3} \frac{dZ}{d\xi} - \frac{1}{9} Z = 0 \quad (191)$$

und ihr Integrale ist nach Formel (31):

$$Z = C_1 \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{u\xi} du}{\sqrt[3]{u^2(u-\frac{1}{3})^2}} + C_2 \xi^{\frac{1}{3}} \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{u\xi} du}{\sqrt[3]{u(u-\frac{1}{3})}} \quad (192)$$

Die beiden Differentialgleichungen (190) und (191) stehen in einem Zusammenhange, der durch die Gleichung (48) ausgedrückt ist, und diese ist:

$$z = e^{\frac{\xi}{3}} \frac{d}{d\xi} \left(e^{-\frac{\xi}{3}} Z \right)$$

Dies gibt entwickelt:

$$z = \frac{dZ}{d\xi} - \frac{1}{3} Z$$

Da nun $z = \frac{dy}{d\xi}$ ist, so hat man:

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{dZ}{d\xi} - \frac{1}{3} Z \quad (193)$$

dies gibt differenzirt:

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} = \frac{d^2 Z}{d\xi^2} - \frac{1}{3} \frac{dZ}{d\xi} \quad (194)$$

und nun findet man das y aus der Gleichung (189); es ist nämlich zunächst:

$$\frac{2}{9} y = -\xi \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{\xi-2}{3} \frac{dy}{d\xi}$$

Setzt man hierin für $\frac{dy}{d\xi}$ und $\frac{d^2 y}{d\xi^2}$ ihre in (193) und (194) stehenden Werthe, so erhält man:

$$y = -\frac{9}{2} \xi \frac{d^2 Z}{d\xi^2} + (3\xi - 3) \frac{dZ}{d\xi} + (1 - \frac{1}{2}\xi) Z$$

Dies vereinfacht sich, wenn man für $\frac{d^2 Z}{d\xi^2}$ seinen aus (191) folgenden Werth setzt, und gibt nach einiger Reduction:

$$y = \frac{3}{2} \xi \frac{dZ}{d\xi} + \frac{1}{2} (1 - \xi) Z$$

Setzt man nun hierin für Z seinen in (192) stehenden Werth, so erhält man, da

$$\frac{dZ}{d\xi} = C_1 \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{u e^{u\xi} du}{\sqrt[3]{u^2(u - \frac{1}{3})^2}} + C_2 \left[\frac{1}{3} \xi^{-\frac{2}{3}} \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{u\xi} du}{\sqrt[3]{u(u - \frac{1}{3})}} + \xi^{\frac{1}{3}} \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{u e^{u\xi} du}{\sqrt[3]{u(u - \frac{1}{3})}} \right]$$

ist, für y folgenden Werth:

$$y = C_1 \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{u\xi} (1 - \xi + 3u\xi) du}{\sqrt[3]{u^2(u - \frac{1}{3})^2}} + C_2 \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\xi^{\frac{1}{3}} e^{u\xi} (2 - \xi + 3u\xi) du}{\sqrt[3]{u(u - \frac{1}{3})}}$$

und setzt man schliesslich hierin für ξ seinen Werth x^3 , so hat man als vollständiges Integrale der Differentialgleichung

$$y'' = x(x y' - 2y) \quad (188)$$

nachstehenden Ausdruck:

$$y = C_1 \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{u x^3} (1 - x^3 + 3u x^3) du}{\sqrt[3]{u^2(u - \frac{1}{3})^2}} + C_2 x \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{u x^3} (2 - x^3 + 3u x^3) du}{\sqrt[3]{u(u - \frac{1}{3})}}$$

woselbst C_1 und C_2 willkürliche Constante bezeichnen.

§. 86.

Die Gleichungen der Form

$$y'' = x^m (x y' + \lambda y) \quad (183)$$

lassen sich noch auf andere Art integrieren. Ich habe nämlich bemerkt, dass die im §. 75 gegebene Methode von Kummer eine Verallgemeinerung gestattet. Betrachtet man nämlich die beiden Differentialgleichungen:

$$y^{(n)} = x^m (A x y' + B y) \quad (195)$$

$$z^{(n+1)} = x^{m-1} (A x z' + B z) \quad (196)$$

so ist

$$y = \int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux) du \quad (165)$$

vorausgesetzt, dass

$$z = \psi(x)$$

das vollständige Integrale der Gleichung (196) ist, und dass zwischen den in $\psi(x)$ eintretenden willkürlichen Constanten eine gewisse Relation stattfindet. Der Beweis, den ich für diesen Satz gebe, ist ganz dem von Kummer gegebenen Beweise nachgebildet.

Differenziert man nämlich die Gleichung (195), so erhält man:

$$y^{(n+1)} = x^{m-1} [A x^2 y'' + (A + B + m A) x y' + m B y] \quad (197)$$

Nun erhält man aus y durch Differenzieren:

$$y', \quad y'' \quad \text{und} \quad y^{(n+1)}$$

nämlich:

$$y = \int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(u x) du \quad (165)$$

$$y' = \int_0^\infty u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi'(u x) du$$

$$y'' = \int_0^\infty u^{m+1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi''(u x) du$$

$$y^{(n+1)} = \int_0^\infty u^{m+n} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi^{(n+1)}(u x) du$$

setzt man nun diese Werthe in (197), so erhält man:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u^{m+n} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi^{(n+1)}(u x) du &= x^{m-1} \int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} [A u^2 x^2 \psi''(u x) + \\ &+ (A + B + m A) u x \psi'(u x) + m B \psi(u x)] du \quad (198) \end{aligned}$$

Nun ist aber, weil $z = \psi(x)$ der Gleichung (196) genügt,

$$\psi^{(n+1)}(x) = x^{m-1} [A x \psi'(x) + B \psi(x)]$$

und folglich auch

$$\psi^{(n+1)}(u x) = A u^m x^m \psi'(u x) + B u^{m-1} x^{m-1} \psi(u x)$$

Wird dies in (198) substituirt, so erhält man eine Gleichung, die durch x^{m-1} abkürzbar ist, und diese lautet dann:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u^{2m+n-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} [A u x \psi'(u x) + B \psi(u x)] du &= \\ = \int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} [A u^2 x^2 \psi''(u x) + (A + B + m A) u x \psi'(u x) + m B \psi(u x)] du \end{aligned}$$

und lässt sich auch so schreiben:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \{A x u^{m+n+1} \psi'(u x) + B u^{m+n} \psi(u x) - A x^2 u^2 \psi''(u x) - \\ - (A + B + m A) x u \psi'(u x) - m B \psi(u x)\} du = 0 \quad (199) \end{aligned}$$

Sieht man von den Grenzen ab, so ist das unbestimmte Integrale des eben aufgeschriebenen Ausdruckes gleich

$$- u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} [B \psi(ux) + A u x \psi'(ux)]$$

Verschwindet nun dieser Ausdruck sowohl für $u=0$ als auch für $u=\infty$, so ist die in (199) aufgestellte Gleichung identisch erfüllt, und somit der aufgestellte Satz bewiesen.

§. 87.

Es sei nach der so eben gegebenen Methode die Differentialgleichung

$$y'' = x (x y' - 2 y) \quad (188)$$

zu integrieren. Ihr Integrale hängt ab von dem Integrale der Differentialgleichung

$$z''' = x z' - 2 z \quad (200)$$

mittelst folgender Gleichung:

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{v^3}{3}} \psi(vx) dv \quad (201)$$

vorausgesetzt, dass

$$z = \psi(x)$$

das Integrale der Gleichung (200) ist, und dass

$$u e^{-\frac{u^3}{3}} [-2 \psi(ux) + u x \psi'(ux)] \quad (202)$$

sowohl für $u=0$ als auch für $u=\infty$ verschwindet.

Die Gleichung (200) lässt sich nach derselben Methode integrieren, die wir im §. 43 gelehrt haben, und liefert für z , welches gleich $\psi(x)$ ist, folgenden Werth: (siehe Seite 14 meiner „Neuen Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen“)

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \mu_1 A_1 \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} \left[\frac{e^{\mu_1 ux} - 1 - \mu_1 ux - \frac{1}{2} \mu_1^2 u^2 x^2}{u^3} - \mu_1 ux - \frac{1}{2} \right] du + \\ & + \mu_2 A_2 \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} \left[\frac{e^{\mu_2 ux} - 1 - \mu_2 ux - \frac{1}{2} \mu_2^2 u^2 x^2}{u^3} - \mu_2 ux - \frac{1}{2} \right] du + \\ & + \mu_3 A_3 \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} \left[\frac{e^{\mu_3 ux} - 1 - \mu_3 ux - \frac{1}{2} \mu_3^2 u^2 x^2}{u^3} - \mu_3 ux - \frac{1}{2} \right] du + A_4 x^2 \end{aligned}$$

woselbst μ_1, μ_2, μ_3 die drei Wurzeln der Gleichung $\mu^3 = 1$ bezeichnen, A_1, A_2, A_3 und A_4 willkürliche Constante sind, zwischen denen die Gleichung

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0$$

stattfindet.

Es ist demnach das Integrale der Gleichung

$$y'' = x^2 y' - 2 y$$

welche durch Differenzieren der Gleichung (188) entstand, folgendes:

$$\begin{aligned}
 y = & \mu_1 A_1 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} \left[\frac{e^{\mu_1 uvx} - 1 - \mu_1 uvx - \frac{1}{2} \mu_1^2 u^2 v^2 x^2}{u^3} - \mu_1 uvx - \frac{1}{2} \right] du dv + \\
 & + \mu_2 A_2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} \left[\frac{e^{\mu_2 uvx} - 1 - \mu_2 uvx - \frac{1}{2} \mu_2^2 u^2 v^2 x^2}{u^3} - \mu_2 uvx - \frac{1}{2} \right] du dv + \\
 & + \mu_3 A_3 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} \left[\frac{e^{\mu_3 uvx} - 1 - \mu_3 uvx - \frac{1}{2} \mu_3^2 u^2 v^2 x^2}{u^3} - \mu_3 uvx - \frac{1}{2} \right] du dv + \\
 & + A_4 x^2 \int_0^\infty e^{-\frac{v^3}{3}} v^2 dv
 \end{aligned} \tag{203}$$

weil für diesen Fall der Ausdruck (202) wirklich sowohl für $u=0$ als auch für $u=\infty$ verschwindet.

Der in (203) stehende Ausdruck soll aber der Gleichung (188) genügen.

Die Gleichung (188) geht für $x=0$ in $y''=0$ über; es muss daher auch der in (203) stehende Ausdruck, zweimal nach x differenziert, auch für $x=0$ auf $y''=0$ führen. Nun ist:

$$\begin{aligned}
 y'' = & \mu_1^3 A_1 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} v^2 \cdot \frac{e^{\mu_1 uvx} - 1}{u} du dv + \\
 & + \mu_2^3 A_2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} v^2 \cdot \frac{e^{\mu_2 uvx} - 1}{u} du dv + \\
 & + \mu_3^3 A_3 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} v^2 \cdot \frac{e^{\mu_3 uvx} - 1}{u} du dv + 2 A_4 \int_0^\infty e^{-\frac{v^3}{3}} v^2 dv
 \end{aligned}$$

Für $x=0$ geht dies über in

$$y'' = 2 A_4 \int_0^\infty e^{-\frac{v^3}{3}} v^2 dv$$

also muss $A_4=0$ sein. Es ist somit das Integrale der Differentialgleichung

$$y'' = x (x y' - 2 y) \tag{188}$$

nachstehendes:

$$\begin{aligned}
 y = & \mu_1 A_1 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} \left[\frac{e^{\mu_1 uvx} - 1 - \mu_1 uvx - \frac{1}{2} \mu_1^2 u^2 v^2 x^2}{u^3} - \mu_1 uvx - \frac{1}{2} \right] du dv + \\
 & + \mu_2 A_2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} \left[\frac{e^{\mu_2 uvx} - 1 - \mu_2 uvx - \frac{1}{2} \mu_2^2 u^2 v^2 x^2}{u^3} - \mu_2 uvx - \frac{1}{2} \right] du dv + \\
 & + \mu_3 A_3 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} \left[\frac{e^{\mu_3 uvx} - 1 - \mu_3 uvx - \frac{1}{2} \mu_3^2 u^2 v^2 x^2}{u^3} - \mu_3 uvx - \frac{1}{2} \right] du dv
 \end{aligned}$$

hiebei stets vorausgesetzt, dass A_1 , A_2 und A_3 willkürliche, blos an die Bedingung

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0$$

gebundene Constante sind, und dass μ_1 , μ_2 , μ_3 die drei Wurzeln der Gleichung

$$\mu^3 = 1$$

sind.

§. 88.

Integriren wir nun die Gleichung:

$$x y'' + (1 - x) y = 0 \quad (204)$$

welche ein specieller Fall der Gleichung (14) ist, für welche nämlich

$$m = 0, \quad \alpha = -1, \quad \beta = +1, \quad A = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}$$

ist. Da hier A und B Brüche sind von entgegengesetztem Zeichen, so werden wir uns wieder der im §. 21 gelehrtten Methode bedienen, und setzen demnach

$$y = e^{-x} z$$

wir erhalten sodann:

$$x z'' - 2 x z' + z = 0 \quad (205)$$

für welche Gleichung

$$m = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad A = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}$$

ist. Nun differenziren wir die Gleichung (205) einmal, man erhält sodann die Gleichung

$$x z''' + (1 - 2x) z'' - z' = 0$$

welche für

$$z' = Z$$

übergeht in:

$$x Z'' + (1 - 2x) Z' - Z = 0 \quad (206)$$

für welche Gleichung

$$m = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}$$

ist. Das Integrale der Gleichung (206) ist nun leicht anzugeben. Selbes ist nach Formel (31):

$$Z = C_1 \int_0^2 \frac{e^{ux} du}{\sqrt{u^2 - 2u}} + C_2 \int_0^2 \frac{e^{ux} \log [x(u^2 - 2u)] du}{\sqrt{u^2 - 2u}}$$

und da $Z = z'$ ist, so hat man:

$$z' = C_1 \int_0^2 \frac{e^{ux} du}{\sqrt{u^2 - 2u}} + C_2 \int_0^2 \frac{e^{ux} \log [x(u^2 - 2u)] du}{\sqrt{u^2 - 2u}}$$

Hieraus kann man durch Differenziren das z'' finden. Es ist nämlich:

$$z'' = C_1 \int_0^2 \frac{u e^{ux} du}{\sqrt{u^2 - 2u}} + C_2 \int_0^2 \frac{e^{ux}}{\sqrt{u^2 - 2u}} \left[u \log [x(u^2 - 2u)] + \frac{1}{x} \right] du$$

Nachdem wir nun z' und z'' gefunden haben, ergibt sich aus (205) das z ; es ist nämlich:

$$z = x (2 z' - z'')$$

folglich hat man:

$$z = C_1 x \int_0^2 \frac{e^{ux} (2-u) du}{\sqrt{u^2 - 2u}} + C_2 \int_0^2 \frac{e^{ux} \{(2-u) x \log [x(u^2 - 2u)] + 1\} du}{\sqrt{u^2 - 2u}}$$

und somit ist:

$$y = C_1 x e^{-x} \int_0^2 \frac{e^{ux} (2-u) du}{\sqrt{u^2 - 2u}} + C_2 e^{-x} \int_0^2 \frac{e^{ux} \{(2-u) x \log [x(u^2 - 2u)] + 1\} du}{\sqrt{u^2 - 2u}}$$

das Integrale der vorgelegten Gleichung; hier bedeuten C_1 und C_2 willkürliche Constante.

§. 89.

Nehmen wir die Gleichung

$$x^4 y'' + x^3 y' + y = 0$$

vor, welche A. Benthem in seinem schönen preisgekrönten Werke: „Vergelijkende Beschouwingen over de voornaamste Integratie-Methoden“, Leyden 1873, behandelt. Selbe geht für

$$x = \frac{1}{\xi}$$

über in

$$\xi \frac{d^2 y}{d \xi^2} + \frac{d y}{d \xi} + \xi y = 0$$

und diese gibt, nach Formel (31) integrirt:

$$y = C_1 \int_{-i}^{+i} \frac{e^{u\xi} du}{\sqrt{u^2 + 1}} + C_2 \int_{-i}^{+i} \frac{e^{u\xi} \log [\xi(u^2 + 1)] du}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

woselbst i für $\sqrt{-1}$ gesetzt wurde. Führt man für u eine neue Variable v in Rechnung ein mittelst der Substitution $u = iv$, so erhält man, wenn man zugleich für ξ seinen Werth $\frac{1}{x}$ setzt:

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} \frac{e^{\frac{iv}{x}} dv}{\sqrt{1-v^2}} + C_2 \int_{-1}^{+1} \frac{e^{\frac{iv}{x}} \log \frac{1-v^2}{x} \cdot dv}{\sqrt{1-v^2}}$$

als Integrale der vorgelegten Gleichung.

§. 90.

Fourier kömmt in seiner „*Théorie analytique de la chaleur*“ (1822) Seite 378 zu folgender Differentialgleichung:

$$x y'' + y' + g x y = 0$$

welche sich mittelst der Formel (34) integrieren lässt und folgendes Integrale besitzt:

$$y = C_1 \int_{-i\sqrt{g}}^{+i\sqrt{g}} e^{ux} (u^2 + g)^{-\frac{1}{2}} du + C_2 \int_{-i\sqrt{g}}^{+i\sqrt{g}} e^{ux} (u^2 + g)^{-\frac{1}{2}} \log [x (u^2 + g)] du$$

Fourier gibt in seinem Werke bloß das erste particuläre Integrale, aber in einer anderen Form an, und bestimmt dann das zweite particuläre Integrale mittelst der bekannten Methode der Variation der willkürlichen Constanten.

Um das erste particuläre Integrale in der Form darzustellen, wie es Fourier gibt, führe ich für u eine neue Variable v in Rechnung ein, mittelst der Substitution

$$u = iv\sqrt{g}$$

und erhalte sodann, die constanten Factoren ausser Acht lassend,

$$y = \int_{-1}^{+1} e^{ivx\sqrt{g}} (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}} dv$$

Man kann dies auch so schreiben:

$$y = \int_{-1}^{+1} (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}} [\cos (vx\sqrt{g}) + i \sin (vx\sqrt{g})] dv$$

oder kürzer auch so:

$$y = \int_{-1}^{+1} \frac{\cos (vx\sqrt{g}) dv}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Führt man nun für v eine neue Variable λ ein, mittelst der Gleichung

$$v = \cos \lambda$$

so erhält man

$$y = \int_0^\pi \cos (x\sqrt{g} \cdot \cos \lambda) d\lambda$$

wie es Fourier angibt. (Siehe Mainardi in den „*Annali delle scienze del Regno Lombardo-Veneto*“, tom. VII, pag. 187.)

§. 91.

Poisson kömmt in seinem Werke: „*Nouvelle théorie de l'action capillaire*“ (1831) Seite 237 auf die Gleichung

$$xz'' + z' - \frac{2}{a^2} xz = 0$$

und gibt für selbe folgendes Integrale an:

$$z = A \int_0^\infty e^{-\frac{xV^2}{a} \cdot \sqrt{1+u^2}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} + B \int_0^\pi e^{-\frac{xV^2}{a} \cos u} du$$

Nach meiner Methode müsste man, um das vollständige Integrale zu erhalten, die mit (34) bezeichnete Formel benützen, und nach dieser ist

$$z = A \int_{-\frac{\sqrt{2}}{a}}^{+\frac{\sqrt{2}}{a}} e^{ux} \left(u^2 - \frac{2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} du + B \int_{-\frac{\sqrt{2}}{a}}^{+\frac{\sqrt{2}}{a}} e^{ux} \left(u^2 - \frac{2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \log \left[x \left(u^2 - \frac{2}{a^2}\right)\right] du$$

Dieses Integrale lässt sich vereinfachen. Denn führt man für u eine neue Variable v ein mittelst der Substitution

$$u = \frac{\sqrt{2}}{a} v$$

so erhält man:

$$z = A_1 \int_{-1}^{+1} e^{\frac{\sqrt{2}}{a} vx} (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}} dv + B_1 \int_{-1}^{+1} e^{\frac{\sqrt{2}}{a} vx} (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}} \log [x (1 - v^2)] dv$$

Auch dieses Integrale gestattet eine Vereinfachung, wenn man für v eine neue Variable w einführt mittelst der Gleichung

$$v = \cos w$$

man erhält alsdann:

$$z = A_2 \int_0^{\pi} e^{\frac{\sqrt{2}}{a} x \cos w} dw + B_2 \int_0^{\pi} e^{\frac{\sqrt{2}}{a} x \cos w} \log [x \sin^2 w] dw$$

Aber Poisson benützt, wenn ich mich so ausdrücken darf, die Formel (75), nach welcher sich für positive Werthe von x folgender Werth für z ergibt:

$$z = A \int_{-\frac{\sqrt{2}}{a}}^{+\frac{\sqrt{2}}{a}} e^{ux} \left(u^2 - \frac{2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} du + B \int_{-\frac{\sqrt{2}}{a}}^{-\infty} e^{ux} \left(u^2 - \frac{2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dw$$

Das erste particuläre Integrale lässt sich, wie so eben gezeigt wurde, auf die Form

$$z = A_2 \int_0^{\pi} e^{\frac{\sqrt{2}}{a} x \cos w} dw$$

oder wenn man früher statt $u = \frac{\sqrt{2}}{a} v$ lieber $u = -\frac{\sqrt{2}}{a} v$ gesetzt hätte, auch auf die Form

$$z = A_2 \int_0^{\pi} e^{-\frac{\sqrt{2}}{a} x \cos w} dw$$

bringen; das zweite particuläre Integrale gibt, wenn man für u eine neue Variable λ einführt, mittelst der Substitution

$$u = -\frac{\sqrt{2}}{a} \sqrt{1 + \lambda^2}$$

folgenden Werth für z :

$$z = B_2 \int_0^\infty e^{-\frac{\sqrt{2}}{a} \cdot x \sqrt{1 + \lambda^2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$$

welcher genau die von Poisson gegebene Form hat.

Dieses Integrale nun entwickelt Poisson auf äusserst geschickte Weise in Reihen. Poisson setzt nämlich

$$\sqrt{1 + \lambda^2} = \mu - \lambda$$

hieraus folgt:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right)$$

ferner

$$\sqrt{1 + \lambda^2} = \frac{1}{2} \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right)$$

und

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = \frac{d\mu}{\mu}$$

demnach ist:

$$z = B_2 \int_1^\infty e^{-\frac{x}{a\sqrt{2}} \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right)} \cdot \frac{d\mu}{\mu}$$

Setzt man

$$x = a \xi \sqrt{2}$$

so ist

$$z = B_2 \int_1^\infty e^{-\xi \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right)} \cdot \frac{d\mu}{\mu}$$

und dies gibt, wenn man den constanten Factor B_2 ausser Acht lässt:

$$z = \int_1^\infty e^{-\mu \xi} \left[1 - \frac{\xi}{\mu} + \frac{\xi^2}{2! \mu^2} - \frac{\xi^3}{3! \mu^3} + \frac{\xi^4}{4! \mu^4} - \dots \right] \frac{d\mu}{\mu}$$

oder

$$z = \int_1^\infty e^{-\mu \xi} \cdot \frac{d\mu}{\mu} - \xi \int_1^\infty e^{-\mu \xi} \cdot \frac{d\mu}{\mu^2} + \frac{\xi^2}{2!} \int_1^\infty e^{-\mu \xi} \cdot \frac{d\mu}{\mu^3} - \frac{\xi^3}{3!} \int_1^\infty e^{-\mu \xi} \cdot \frac{d\mu}{\mu^4} + \dots$$

wobei sich sämtliche hier vorkommende Integrale mittelst Anwendung der Methode des theilweisen Integrirens auf das erste Integrale zurückführen lassen.

Führt man in dem Ausdrücke

$$z = B \int_{-\frac{V_2}{a}}^{-\infty} e^{ux} \left(u^2 - \frac{2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} du$$

für u eine neue Variable μ ein mittelst der Substitution

$$u = -\frac{1}{aV_2} \left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)$$

so erhält man unmittelbar das von Poisson aufgestellte Integrale

$$z = B \int_1^{\infty} e^{-\frac{x}{aV_2} \left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)} \cdot \frac{d\mu}{\mu}$$

Dritter Abschnitt.

Aphorismen aus dem Gebiete der Differentialgleichungen.

§. 92.

Ich habe in meinem Werke: „Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen“, zweite Fortsetzung Seite 63, Differentialgleichungen der Form

$$y^{(n)} = x^m (A x^2 y'' + B x y' + C y)$$

zu integrieren versucht. Ich will in diesem §. eine dieser Form angehörige Differentialgleichung zu integrieren versuchen.

Es sei zu suchen jene lineare Differentialgleichung, der genügt wird durch

$$z = x^n e^{ax^2}$$

Durch Differenziren erhält man:

$$z' = x^{n-1} e^{ax^2} (n + 2 a x^2)$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen das e^{ax^2} , so erhält man die Differentialgleichung:

$$x z' = (n + 2 a x^2) z$$

Wird diese Gleichung n mal differenzirt, unter n eine ganze positive Zahl verstanden, so erhält man:

$$x z^{(n+1)} + n z^{(n)} = (n + 2 a x^2) z^{(n)} + 4 a n x z^{(n-1)} + 2 a n (n - 1) z^{(n-2)}$$

oder reducirt:

$$x z^{(n+1)} = 2 a x^2 z^{(n)} + 4 a n x z^{(n-1)} + 2 a n (n - 1) z^{(n-2)}$$

Setzt man hierein

$$z^{(n-2)} = y$$

so erhält man:

$$x y''' = 2 a x^2 y'' + 4 a n x y' + 2 a n (n - 1) y \quad (207)$$

und diese lineare Differentialgleichung ist dritter Ordnung und gehört zu den oben erwähnten Differentialgleichungen. Derselben genügt offenbar der Ausdruck:

$$y = \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} [x^n e^{ax^2}]$$

Allein dieses Integrale ist bloß ein particuläres Integrale der Gleichung (207).

Um das vollständige Integrale der Gleichung (207) zu finden, setze ich in dieselbe

$$y = z^{(n-2)}$$

und erhalte sodann

$$x z^{(n+1)} + n z^{(n)} = (n + 2 a x^2) z^{(n)} + 4 a n x z^{(n-1)} + 2 a n (n - 1) z^{(n-2)}$$

und dies lässt sich auch so schreiben:

$$\frac{d^n}{dx^n} (x z') = \frac{d^n}{dx^n} [(n + 2 a x^2) z]$$

oder kürzer auf folgende Weise:

$$\frac{d^n}{dx^n} [x z' - (n + 2 a x^2) z] = 0$$

Dieser Gleichung wird Genüge geleistet für jene Werthe von z , die folgender Differentialgleichung erster Ordnung Genüge leistet:

$$x z' - (n + 2 a x^2) z = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_n x^{n-1}$$

und hieraus folgt:

$$z = x^n e^{a x^2} \int \frac{C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_n x^{n-1}}{x^{n+1}} \cdot e^{-a x^2} dx$$

Man kann das Integrale

$$\int \frac{C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_n x^{n-1}}{x^{n+1}} \cdot e^{-a x^2} dx$$

auch so schreiben:

$$\int \frac{K_1 + K_2 x}{x^{n+1}} \cdot e^{-a x^2} dx + \frac{K_3 + K_4 x + K_5 x^2 + \dots + K_n x^{n-3}}{x^n} \cdot e^{-a x^2}$$

denn aus der Gleichung:

$$\begin{aligned} \int \frac{C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_n x^{n-1}}{x^{n+1}} \cdot e^{-a x^2} dx &= \int \frac{K_1 + K_2 x}{x^{n+1}} \cdot e^{-a x^2} dx + \\ &+ \frac{K_3 + K_4 x + K_5 x^2 + \dots + K_n x^{n-3}}{x^n} \cdot e^{-a x^2} \end{aligned}$$

folgt durch Differenzieren:

$$\begin{aligned} \frac{C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_n x^{n-1}}{x^{n+1}} \cdot e^{-a x^2} &= \frac{K_1 + K_2 x}{x^{n+1}} \cdot e^{-a x^2} + \\ &+ \frac{K_4 + 2 K_5 x + \dots + (n-3) K_n x^{n-4}}{x^n} \cdot e^{-a x^2} - \\ &- n \cdot \frac{K_3 + K_4 x + K_5 x^2 + \dots + K_n x^{n-3}}{x^{n+1}} \cdot e^{-a x^2} - \\ &- 2 a \cdot \frac{K_3 + K_4 x + K_5 x^2 + \dots + K_n x^{n-3}}{x^{n-1}} \cdot e^{-a x^2} \end{aligned}$$

Dividirt man beiderseits durch $e^{-a x^2}$ und befreit die Gleichung von Brüchen, so erhält man:

§. 93.

Ich habe in meinen „Neuen Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen“, und zwar Seite 69 derselben gezeigt, dass die Gleichung

$$A x y^{(n)} + B y^{(n-1)} = x^m y$$

ein Integrale habe von folgender Gestalt:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} u^{m-1} (1 - u^{m+n-1})^{\frac{B}{A(m+n-1)} - 1} \psi(ux) du$$

woselbst $\psi(x)$ der Gleichung

$$A \psi^{(n)}(x) = x^{m-1} \psi(x) \quad (208)$$

genügt, und u_1, u_2 solche constante Zahlen sind, die sich als Wurzeln der Gleichung

$$(1 - u^{m+n-1})^{\frac{B}{A(m+n-1)}} \psi^{(n-1)}(ux) = 0$$

ergeben.

Ich will nun hier den speciellen Fall betrachten, in welchem

$$A = 1$$

$$B = m + n - 1$$

ist; die zu integrirnde Differentialgleichung lautet alsdann:

$$x y^{(n)} + (m + n - 1) y^{(n-1)} = x^m y \quad (209)$$

Ihr Integrale ist:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} u^{m-1} \psi(ux) du \quad (210)$$

Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen hat man aufzulösen die Gleichung:

$$(1 - u^{m+n-1}) \psi^{(n-1)}(ux) = 0 \quad (211)$$

Um das Integrale (210) zu vereinfachen, bemerke man, dass aus der Gleichung (208), wenn man in selbe ux statt x setzt, und zugleich berücksichtigt, dass $A = 1$ ist,

$$\psi^{(n)}(ux) = u^{m-1} x^{m-1} \psi(ux)$$

folgt. Hieraus folgt weiter

$$u^{m-1} \psi(ux) = \frac{\psi^{(n)}(ux)}{x^{m-1}}$$

dies in (210) eingeführt, liefert für y folgenden Werth:

$$y = \frac{1}{x^{m-1}} \int_{u_1}^{u_2} \psi^{(n)}(ux) du$$

Führt man hier die Integration durch, so kömmt man zu der Gleichung:

$$y = \frac{1}{x^m} \left[\psi^{(n-1)}(ux) \right]_{u_1}^{u_2} \quad (212)$$

Zur Bestimmung von u_1 und u_2 dient, wie schon gesagt, die Gleichung (211), aus welcher

$$u^{m+n-1} = 1$$

folgt. Diese Gleichung hat $m + n - 1$ verschiedene Wurzeln; eine der Wurzeln ist

$$u = 1$$

und nun behaupte ich, dass, wenn man in (212) $u = 1$ setzt, das Resultat der Substitution, d. i.

$$y = \frac{\psi^{(n-1)}(x)}{x^m} \quad (213)$$

das vollständige Integrale der Gleichung (209) ist.

Um dies zu beweisen, hat man das eben gefundene y in die Gleichung (209) einzusetzen und zu zeigen, dass das Resultat der Substitution eine Identität ist. Man kann aber auch den Beweis einfacher auf die Weise führen, indem man zeigt, dass man durch Elimination von $\psi(x)$ aus den beiden Gleichungen

$$y = \frac{\psi^{(n-1)}(x)}{x^m} \quad \text{und} \quad \psi^{(n)}(x) = x^{m-1} \psi(x)$$

auf die Gleichung (209) kömmt.

In der That folgt aus (213) die Gleichung

$$x^m y = \psi^{(n-1)}(x)$$

Differenzirt man diese Gleichung einmal, so erhält man:

$$x^m y' + m x^{m-1} y = \psi^{(n)}(x)$$

und da

$$\psi^{(n)}(x) = x^{m-1} \psi(x)$$

ist, so hat man:

$$x^m y' + m x^{m-1} y = x^{m-1} \psi(x)$$

Diese Gleichung lässt sich durch x^{m-1} dividiren; thut man dies, so erhält man:

$$x y' + m y = \psi(x)$$

Differenzirt man nun diese Gleichung $n - 1$ mal, so erhält man:

$$x y^{(n)} + (m + n - 1) y^{(n-1)} = \psi^{(n-1)}(x)$$

und wenn man hierein statt $\psi^{(n-1)}(x)$ seinen Werth $x^m y$ setzt, so erhält man die Gleichung:

$$x y^{(n)} + (m + n - 1) y^{(n-1)} = x^m y \quad (209)$$

welches in der That die vorgelegte Gleichung ist.

§. 94.

Auf gleiche Weise lässt sich die Gleichung

$$x y^{(n)} + \lambda (m + n - 1) y^{(n-1)} = x^m y \quad (214)$$

im Falle λ eine reelle ganze positive Zahl bezeichnet, behandeln; für selbe ist

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= \lambda (m + n - 1) \end{aligned}$$

demnach ist:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} u^{m-1} (1 - u^{m+n-1})^{\lambda-1} \psi(u x) du \quad (215)$$

vorausgesetzt, dass

$$\psi^{(n)}(x) = x^{m-1} \psi(x) \quad (216)$$

ist, und dass die Integrationsgrenzen u_1 , u_2 solche constante Zahlen sind, die sich als Wurzeln der Gleichung

$$(1 - u^{m+n-1})^\lambda \psi^{(n-1)}(u x) = 0$$

ergeben. Man kann die in (215) angezeigte Integration leicht ausführen, denn aus der Gleichung (216) folgt

$$\psi^{(n)}(u x) = u^{m-1} x^{m-1} \psi(u x)$$

wird hieraus $u^{m-1} \psi(u x)$ gesucht, so ergibt sich

$$u^{m-1} \psi(u x) = \frac{\psi^{(n)}(u x)}{x^{m-1}}$$

Dies in (215) eingeführt, gibt für y folgenden Werth:

$$y = \frac{1}{x^{m-1}} \int_{u_1}^{u_2} (1 - u^{m+n-1})^{\lambda-1} \psi^{(n)}(u x) du$$

oder wenn man $(1 - u^{m+n-1})^{\lambda-1} = f(u)$ setzt:

$$y = \frac{1}{x^{m-1}} \int_{u_1}^{u_2} f(u) \psi^{(n)}(u x) du \quad (217)$$

Man kann diese Gleichung auch so schreiben:

$$y = \frac{1}{x^m} \int_{u_1}^{u_2} f(u) \cdot \frac{d \psi^{(n-1)}(u x)}{du} du$$

Behandelt man dieses y mittelst der Methode des theilweisen Integrirens, so erhält man:

$$y = \frac{1}{x^m} \left\{ f(u) \psi^{(n-1)}(u x) \right\}_{u_1}^{u_2} - \frac{1}{x^m} \int_{u_1}^{u_2} f'(u) \psi^{(n-1)}(u x) du$$

Verfährt man mit dem hier stehenden Integrale auf ganz gleiche Weise, so ergibt sich

$$y = \left\{ \frac{f(u) \cdot \psi^{(n-1)}(u x)}{x^m} - \frac{f'(u) \cdot \psi^{(n-2)}(u x)}{x^{m+1}} \right\}_{u_1}^{u_2} + \frac{1}{x^{m+1}} \int_{u_1}^{u_2} f''(u) \psi^{(n-2)}(u x) du$$

Wird mit dem in diesem Ausdrucke stehenden Integrale nochmals so verfahren, so erhält man:

$$y = \left\{ \frac{f(u) \cdot \psi^{(n-1)}(ux)}{x^m} - \frac{f'(u) \cdot \psi^{(n-2)}(ux)}{x^{m+1}} + \frac{f''(u) \cdot \psi^{(n-3)}(ux)}{x^{m+2}} \right\}_{u_1}^{u_2} - \frac{1}{x^{m+2}} \int_{u_1}^{u_2} f'''(u) \psi^{(n-3)}(ux) du$$

und fährt man auf ähnliche Weise fort, so kommt man zu nachstehender Gleichung:

$$y = \left\{ \frac{f(u) \cdot \psi^{(n-1)}(ux)}{x^m} - \frac{f'(u) \cdot \psi^{(n-2)}(ux)}{x^{m+1}} + \frac{f''(u) \cdot \psi^{(n-3)}(ux)}{x^{m+2}} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{f^{(n-1)}(u) \psi(u x)}{x^{m+n-1}} \right\}_{u_1}^{u_2} + (-1)^n \cdot \frac{1}{x^{m+n-1}} \int_{u_1}^{u_2} f^{(n)}(u) \cdot \psi(ux) du \quad (218)$$

Da nun $f(u)$ von folgender Form ist:

$$f(u) = A_0 + A_1 u^{m+n-1} + A_2 u^{2m+2n-2} + A_3 u^{3m+3n-3} + \dots$$

woselbst $A_0, A_1, A_2, A_3 \dots$ constante Zahlen bezeichnen, so ergibt sich für $f^{(n)}(u)$ ein Ausdruck von nachstehender Form:

$$f^{(n)}(u) = B_1 u^{m-1} + B_2 u^{2m+n-2} + B_3 u^{3m+2n-3} + \dots$$

und dies lässt sich auch so schreiben:

$$f^{(n)}(u) = u^{m-1} [B_1 + B_2 u^{m+n-1} + B_3 u^{2m+2n-2} + \dots]$$

oder kürzer:

$$f^{(n)}(u) = u^{m-1} \varphi(u)$$

in welchem Ausdrucke $\varphi(u)$ um $m+n-1$ Grade niedriger ist, als $f(u)$. Das in (218) stehende Integrale

$$(-1)^n \cdot \frac{1}{x^{m+n-1}} \int_{u_1}^{u_2} f^{(n)}(u) \psi(ux) du$$

gestattet demnach folgende Schreibweise:

$$(-1)^n \cdot \frac{1}{x^{m+n-1}} \int_{u_1}^{u_2} u^{m-1} \varphi(u) \psi(ux) du$$

und setzt man hierin statt $u^{m-1} \psi(ux)$ seinen Werth $\frac{\psi^{(n)}(ux)}{x^{m-1}}$ so erhält man

$$(-1)^n \cdot \frac{1}{x^{2m+n-2}} \int_{u_1}^{u_2} \varphi(u) \psi^{(n)}(ux) du$$

was sich genau so, wie das in (217) stehende Integrale behandeln lässt. Führt man auf diese Weise fort, so erhält man schliesslich für y eine endliche Reihe, welche kein Integrale mehr enthält.

§. 95.

Am klarsten zeigt sich das so eben Gesagte an einem Beispiele.

Sei demnach zu integrieren die Differentialgleichung:

$$x y''' + 21 y'' = x^5 y \quad (219)$$

Setzt man

$$\psi'''(x) = x^4 \psi(x)$$

so ist, da $n = 3$, $m = 5$, $\lambda = 3$ ist,

$$y = \int_{u_1}^{u_2} u^4 (1 - u^7)^2 \psi(ux) du \quad (220)$$

das vollständige Integrale der Differentialgleichung (219); u_1 und u_2 bedeuten die Wurzeln der Gleichung

$$(1 - u^7)^3 \psi''(ux) = 0$$

Schreibt man nun in (220) für $u^4 \psi(ux)$ seinen Werth $\frac{\psi'''(ux)}{x^4}$ so wird

$$y = \frac{1}{x^4} \int_{u_1}^{u_2} (1 - u^7)^2 \psi'''(ux) du \quad (221)$$

und dies gibt, nach Formel (218) entwickelt:

$$y = \left\{ \frac{(1 - 2u^7 + u^{14}) \psi''(ux)}{x^5} - \frac{(-14u^6 + 14u^{13}) \psi'(ux)}{x^6} + \frac{(-84u^5 + 182u^{12}) \psi(ux)}{x^7} \right\}_{u_1}^{u_2} - \frac{1}{x^7} \int_{u_1}^{u_2} u^4 (-420 + 2184u^7) \psi(ux) du \quad (222)$$

Schreibt man im letzten Integrale für $u^4 \psi(ux)$ seinen Werth $\frac{\psi'''(ux)}{x^4}$, so geht das in der Gleichung (222) stehende Integrale über in:

$$J = -\frac{1}{x^{11}} \int_{u_1}^{u_2} (-420 + 2184u^7) \psi'''(ux) du$$

und dies gibt, ebenso wie das Integrale (221) behandelt, folgendes:

$$J = \left\{ -\frac{(-420 + 2184u^7) \psi''(ux)}{x^{12}} + \frac{15288u^6 \psi'(ux)}{x^{13}} - \frac{91728u^5 \psi(ux)}{x^{14}} \right\}_{u_1}^{u_2} + \frac{458640}{x^{14}} \int_{u_1}^{u_2} u^4 \psi(ux) du$$

Setzt man im letzten Integrale abermals für $u^4 \psi(ux)$ seinen Werth $\frac{\psi'''(ux)}{x^4}$, so lässt sich die Integration augenblicklich durchführen, und man erhält für dasselbe

$$\frac{458640}{x^{19}} \cdot \psi''(ux)$$

folglich ist

$$y = \left\{ \frac{(1 - 2u^7 + u^{14}) \psi''(ux)}{x^5} - \frac{(-14u^6 + 14u^{13}) \psi'(ux)}{x^6} + \frac{(-84u^5 + 182u^{12}) \psi(ux)}{x^7} - \right. \\ \left. - \frac{(-420 + 2184u^7) \psi''(ux)}{x^{12}} + \frac{15288u^6 \psi'(ux)}{x^{13}} - \frac{91728u^5 \psi(ux)}{x^{14}} + \right. \\ \left. + \frac{458640 \psi''(ux)}{x^{19}} \right\}_{u_1}^{u_2} \quad (223)$$

Die Gleichung, welche zur Bestimmung der Grenzwerte u_1 und u_2 dient, lautet:

$$(1 - u^7)^3 \psi''(ux) = 0$$

und ihr wird genügt für $u = 1$; setzen wir nun in (223) für u die Zahl 1, so erhält man:

$$y = \frac{98 \psi(x)}{x^7} - \frac{1764 \psi''(x)}{x^{12}} + \frac{15288 \psi'(x)}{x^{13}} - \frac{91728 \psi(x)}{x^{14}} + \frac{458640 \psi''(x)}{x^{19}}$$

Man kann nun durchgehends 98 als Factor herausheben, und da dieser constant ist, ihn auch ganz weglassen; thut man dies, so erhält man:

$$y = \frac{\psi(x)}{x^7} - \frac{18 \psi''(x)}{x^{12}} + \frac{156 \psi'(x)}{x^{13}} - \frac{936 \psi(x)}{x^{14}} + \frac{4680 \psi''(x)}{x^{19}} \quad (224)$$

als Integrale der vorgelegten Differentialgleichung (219).

§. 96.

Man kann sich leicht von der Richtigkeit des gewonnenen Integrales überzeugen. Zu dem Zwecke schreibe ich y auf folgende Weise:

$$y = \left(\frac{1}{x^7} - \frac{936}{x^{14}} \right) \psi(x) + \frac{156}{x^{13}} \psi'(x) + \left(\frac{4680}{x^{19}} - \frac{18}{x^{12}} \right) \psi''(x) \quad (225)$$

bilde hieraus y' , y'' und y''' und setze jedesmal für $\psi'''(x)$ seinen Werth $x^4 \psi(x)$, man erhält sodann:

$$y' = \left(-\frac{25}{x^8} + \frac{17784}{x^{15}} \right) \psi(x) + \left(\frac{1}{x^7} - \frac{2964}{x^{14}} \right) \psi'(x) + \left(\frac{372}{x^{13}} - \frac{88920}{x^{20}} \right) \psi''(x)$$

$$y'' = \left(\frac{572}{x^9} - \frac{355680}{x^{16}} \right) \psi(x) + \left(-\frac{32}{x^8} + \frac{59280}{x^{15}} \right) \psi'(x) + \left(\frac{1}{x^7} - \frac{7800}{x^{14}} + \right. \\ \left. + \frac{1778400}{x^{21}} \right) \psi''(x)$$

$$y''' = \left(\frac{1}{x^3} - \frac{12948}{x^{10}} + \frac{7469280}{x^{17}} \right) \psi(x) + \left(\frac{828}{x^9} - \frac{1244880}{x^{16}} \right) \psi'(x) + \\ + \left(-\frac{39}{x^8} + \frac{168480}{x^{15}} - \frac{37346400}{x^{22}} \right) \psi''(x)$$

Diese Werthe führen, in (219) substituirt, zu einer identischen Gleichung, folglich ist der in (225) stehende Werth von y richtig.

§. 97.

Man könnte sich auch auf folgende einfachere Art von der Richtigkeit des in (225) stehenden Integrales überzeugen. Aus der Gleichung (225) folgt:

$$x^{19}y = (x^{12} - 936x^5)\psi(x) + 156x^6\psi'(x) + (4680 - 18x^7)\psi''(x)$$

Differenzirt man diese Gleichung dreimal nach einander, und setzt man jedesmal für $\psi'''(x)$ seinen Werth $x^4\psi(x)$, so erhält man successive:

$$x^{13}y' + 19x^{12}y = -6x^5\psi(x) + x^6\psi'(x) + 30\psi''(x)$$

$$x^7y'' + 32x^6y' + 228x^5y = \psi''(x)$$

$$x^3y''' + 39x^2y'' + 420xy' + 1140y = \psi(x)$$

Eliminirt man nun aus den vier letzten Gleichungen $\psi(x)$, $\psi'(x)$ und $\psi''(x)$, so kömmt man zu der Gleichung

$$xy''' + 21y'' = x^5y \quad (219)$$

wodurch die Richtigkeit des in (225) aufgestellten Werthes von y dargethan ist.

§. 98.

Liouville hat im 21. Cahier des „*Journal de l'école polytechnique*“ gezeigt, wie jede Function von x sich in der Form

$$y = S[A_m e^{mx}]$$

darstellen, und dann beliebig oft mittelst der Formel

$$\frac{d^\mu y}{dx^\mu} = S[A_m m^\mu e^{mx}]$$

differenziren lasse, wo μ eine reelle oder imaginäre, eine ganze oder gebrochene, eine positive oder negative Zahl bezeichnet.

Ich habe hier die Absicht, die Function

$$y = x^n e^{\lambda x^2}$$

in welcher λ eine constante, aber von Null verschiedene, und n Null oder eine ganze positive Zahl bezeichnet, in der Form

$$y = S[A_m e^{mx}]$$

darzustellen.

Es ist:

$$e^{\lambda x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 + 2ux\sqrt{\lambda}} du$$

wie sich leicht beweisen lässt.

Wird diese Gleichung beiderseits mit x multiplicirt, so erhält man:

$$x e^{\lambda x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-u^2 + 2ux\sqrt{\lambda}} du$$

dies gestattet folgende Schreibweise:

$$x e^{\lambda x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot (2\sqrt{\lambda})} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \frac{d}{du} (e^{2ux\sqrt{\lambda}}) du$$

und gibt, nach der Methode des theilweisen Integrirens behandelt,

$$x e^{\lambda x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot (2\sqrt{\lambda})} \left\{ e^{-u^2 + 2ux\sqrt{\lambda}} - \int e^{2ux\sqrt{\lambda}} \frac{d}{du} (e^{-u^2}) du \right\}_{-\infty}^{+\infty}$$

Nun verschwindet $e^{-u^2 + 2ux\sqrt{\lambda}}$ sowohl für $u = -\infty$, als auch für $u = +\infty$, folglich hat man:

$$x e^{\lambda x^2} = \frac{(-1)}{\sqrt{\pi} (2\sqrt{\lambda})} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ux\sqrt{\lambda}} \frac{d}{du} (e^{-u^2}) \cdot du$$

Wird genau derselbe Weg nochmals eingeschlagen, so erhält man:

$$x^2 e^{\lambda x^2} = \frac{(-1)^2}{\sqrt{\pi} (2\sqrt{\lambda})^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ux\sqrt{\lambda}} \frac{d^2}{du^2} (e^{-u^2}) du$$

und wenn man wiederholt diesen Weg einschlägt, so erhält man:

$$x^n e^{\lambda x^2} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi} \cdot (2\sqrt{\lambda})^n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ux\sqrt{\lambda}} \frac{d^n}{du^n} (e^{-u^2}) du$$

und dies ist die von uns gesuchte Form.

§. 99.

Ich will trachten, das Integrale:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} \varphi(u) du$$

zu ermitteln für den Fall, in welchem A und B positive Zahlen bedeuten, vorausgesetzt, dass $\varphi(u)$ eine ganze algebraische Function von u ist.

Führt man in dem obigen Integrale, dessen Werth wir J nennen wollen, für u eine neue Variable w ein mittelst der Substitution:

$$u = \alpha + (\beta - \alpha) w$$

so erhält man:

$$J = (-1)^{B-1} (\beta - \alpha)^{A+B-1} \int_0^1 w^{A-1} (1-w)^{B-1} \varphi[\alpha + (\beta - \alpha) w] dw$$

Setzt man der Kürze halber

$$\begin{aligned} A + B &= s \\ \beta - \alpha &= \gamma \end{aligned}$$

und entwickelt man $\varphi(\alpha + \gamma w)$ nach Taylor's Reihe, so erhält man:

$$J = (-1)^{B-1} \gamma^{s-1} \int_0^1 w^{A-1} (1-w)^{B-1} \left[\varphi(\alpha) + \gamma w \varphi'(\alpha) + \frac{\gamma^2 w^2}{2!} \varphi''(\alpha) + \right. \\ \left. + \frac{\gamma^3 w^3}{3!} \varphi'''(\alpha) + \dots \right] dw$$

Man kann diesen Ausdruck auch so schreiben:

$$J = (-1)^{B-1} \gamma^{s-1} \left\{ \varphi(\alpha) \int_0^1 w^{A-1} (1-w)^{B-1} dw + \right. \\ + \gamma \varphi'(\alpha) \int_0^1 w^A (1-w)^{B-1} dw + \\ + \frac{\gamma^2 \varphi''(\alpha)}{2!} \int_0^1 w^{A+1} (1-w)^{B-1} dw + \\ \left. + \frac{\gamma^3 \varphi'''(\alpha)}{3!} \int_0^1 w^{A+2} (1-w)^{B-1} dw + \dots \right\}$$

Diese Reihe lässt sich auch so schreiben:

$$J = (-1)^{B-1} \gamma^{s-1} \left\{ \varphi(\alpha) \cdot \frac{\Gamma(A) \Gamma(B)}{\Gamma(A+B)} + \gamma \varphi'(\alpha) \cdot \frac{\Gamma(A+1) \Gamma(B)}{\Gamma(A+B+1)} + \right. \\ \left. + \frac{\gamma^2 \varphi''(\alpha)}{2!} \cdot \frac{\Gamma(A+2) \Gamma(B)}{\Gamma(A+B+2)} + \frac{\gamma^3 \varphi'''(\alpha)}{3!} \cdot \frac{\Gamma(A+3) \Gamma(B)}{\Gamma(A+B+3)} + \dots \right\}$$

und diese gestattet folgende Schreibweise:

$$J = (-1)^{B-1} \gamma^{s-1} \cdot \frac{\Gamma(A) \Gamma(B)}{\Gamma(A+B)} \left\{ \varphi(\alpha) + \frac{A}{s} \cdot \gamma \varphi'(\alpha) + \frac{A(A+1)}{s(s+1)} \cdot \frac{\gamma^2 \varphi''(\alpha)}{2!} + \right. \\ \left. + \frac{A(A+1)(A+2)}{s(s+1)(s+2)} \cdot \frac{\gamma^3 \varphi'''(\alpha)}{3!} + \dots \right\}$$

Setzt man in diese Gleichung $\varphi(u) = 1$, so erhält man:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du = (-1)^{B-1} \gamma^{s-1} \cdot \frac{\Gamma(A) \Gamma(B)}{\Gamma(A+B)}$$

und folglich ist:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \varphi(u) du = \left\{ \varphi(\alpha) + \frac{A}{s} \cdot \gamma \varphi'(\alpha) + \frac{A(A+1)}{s(s+1)} \cdot \frac{\gamma^2 \varphi''(\alpha)}{2!} + \right. \\ \left. + \frac{A(A+1)(A+2)}{s(s+1)(s+2)} \cdot \frac{\gamma^3 \varphi'''(\alpha)}{3!} + \dots \right\} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du$$

Die auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens stehende Reihe ist, da $\varphi(u)$ als ganze algebraische Function von u vorausgesetzt ist, eine endliche Reihe.

Anmerkung. Eine ähnliche Formel stellte Kummer im XII. Bande von Crelle's Journal Seite 144 unter der Bezeichnung (6) auf.

§. 100.

Wir wollen in diesem §. einen neuen Beweis für die Richtigkeit nachstehender, von mir herrührenden Formel

$$\frac{d^n y}{d \xi^n} = (-1)^n x^{n+1} \frac{d^n (x^{n-1} y)}{d x^n}$$

geben, in welcher $\xi = \frac{1}{x}$ ist, und n eine ganze positive Zahl bedeutet *).

Es sei

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots = S[A_m x^m]$$

oder auch

$$y = A_0 + \frac{A_1}{\xi} + \frac{A_2}{\xi^2} + \frac{A_3}{\xi^3} + \dots = S\left[\frac{A_m}{\xi^m}\right] \quad (226)$$

Aus der ersten Reihe folgt:

$$x^{n-1} y = S[A_m x^{m+n-1}]$$

Wird diese Gleichung n mal nach x differenzirt, so erhält man:

$$\frac{d^n (x^{n-1} y)}{d x^n} = S[A_m (m+n-1)(m+n-2)(m+n-3) \dots (m+1)m \cdot x^{m-1}]$$

hieraus folgt:

$$\begin{aligned} (-1)^n x^{n+1} \frac{d^n (x^{n-1} y)}{d x^n} &= \\ &= (-1)^n S[A_m (m+n-1)(m+n-2)(m+n-3) \dots (m+1)m \cdot x^{m+n}] \end{aligned} \quad (227)$$

Differenzirt man nun die Gleichung (226) n mal nach ξ , so erhält man:

$$\frac{d^n y}{d \xi^n} = S[-m(-m-1)(-m-2) \dots (-m-n+1) A_m \xi^{-m-n}]$$

und dies lässt sich auch so schreiben:

$$\frac{d^n y}{d \xi^n} = (-1)^n S[m(m+1)(m+2) \dots (m+n-1) A_m x^{m+n}]$$

Aus dieser Gleichung und der Gleichung (227) folgt nun unmittelbar die Gleichung:

$$\frac{d^n y}{d \xi^n} = (-1)^n x^{n+1} \frac{d^n (x^{n-1} y)}{d x^n}$$

§. 101.

Ich stelle mir in diesem § die Aufgabe, aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} y' &= P y \\ u &= A y^2 + B y \end{aligned}$$

*) Ich habe diese Formel schon im Jahre 1860 in meinen Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen publicirt.

in welchen P eine Function von x ist, und A und B constante Zahlen bezeichnen, das y zu eliminiren.

Zu dem Zwecke construire ich vorerst u' . Es ist:

$$u' = 2 A y y' + B y'$$

setzt man für y' seinen Werth $P y$, so erhält man:

$$u' = 2 A P y^2 + B P y$$

es ist somit u' von derselben Gestalt wie u . Bildet man nun u'' , so erhält man:

$$u'' = P (4 A y + B) y' + P' (2 A y^2 + B y)$$

Wird auch hierin für y' sein Werth gesetzt, so erhält man:

$$u'' = 2 A (2 P^2 + P') y^2 + B (P^2 + P') y$$

Eliminirt man nun aus den drei Gleichungen:

$$u = A y^2 + B y$$

$$u' = 2 A P y^2 + B P y$$

$$u'' = 2 A (2 P^2 + P') y^2 + B (P^2 + P') y$$

y und y^2 , indem man nämlich aus den ersten zwei Gleichungen y und y^2 sucht, und die gefundenen Werthe in die dritte Gleichung substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$P u'' - (P' + 3 P^2) u' + 2 P^3 u = 0$$

Aus dieser Gleichung sind die beiden Constanten A und B verschwunden, sie gilt daher, wie immer auch A und B beschaffen sein mögen. Es folgt hieraus, dass dieser Differentialgleichung genügt wird für

$$u = C_1 y^2 + C_2 y$$

unter C_1 und C_2 willkürliche Constante, und unter y das Integrale der Gleichung $y' = P y$ verstanden.

§. 102.

Wollte man aus den beiden Gleichungen

$$y' = P y$$

$$u = A y^3 + B y^2 + C y$$

in welchen P eine Function von x ist, und A , B und C constante Zahlen bezeichnen, das y eliminiren, so müsste man auf gleiche Weise verfahren. Man bilde sich nämlich u' , u'' und u''' , und setze stets statt y' seinen Werth $P y$, man erhält dann:

$$u' = P (3 A y^2 + 2 B y + C)$$

$$u'' = 3 A (3 P^2 + P') y^2 + 2 B (2 P^2 + P') y + C (P^2 + P')$$

$$u''' = 3 A (9 P^3 + P'' + 9 P P') y^2 + 2 B (4 P^3 + P'' + 6 P P') y + C (P^3 + P'' + 3 P P')$$

Eliminirt man nun aus den vier Gleichungen, welche wir für u , u' , u'' und u''' aufgestellt haben, y , y^2 und y^3 , so erhält man die Gleichung:

$$P^2 u''' - (6 P^3 + 3 P P') u'' + (11 P^4 - P P'' + 6 P^2 P' + 3 P'^2) u' - 6 P^5 u = 0$$

aus der die drei Constanten A , B und C verschwunden sind. Es genügt daher dieser Gleichung nachstehender Werth von u :

$$u = C_1 y^3 + C_2 y^2 + C_3 y$$

woselbst C_1 , C_2 , C_3 willkürliche Constante bezeichnen.

Man kann, auf ähnliche Weise vorgehend, leicht jene lineare Differentialgleichung construiren, der genügt wird durch nachstehenden Werth von u :

$$u = C_1 y^n + C_2 y^{n-1} + C_3 y^{n-2} + \dots + C_{n-1} y^2 + C_n y$$

woselbst y der Differentialgleichung $y' = Py$ genügt, und C_1 , C_2 , $C_3 \dots C_n$ willkürliche Constante sind.

§. 103.

Es sei aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} y' &= Py \\ u &= ALy^2 + BM y \end{aligned}$$

in welchen P , L und M gegebene Functionen von x sind, und A und B constante Zahlen bezeichnen, das y zu eliminiren.

Zu dem Zwecke verfare ich genau so, wie im §. 101, ich construiren nämlich u' und u'' . Es ist:

$$u' = (2ALy + BM)y' + AL'y^2 + BM'y$$

Setzt man für y' seinen Werth Py , so erhält man:

$$u' = A(2PL + L')y^2 + B(MP + M')y$$

und sieht hieraus, dass u' von derselben Form wie u ist. Setzt man der Kürze halber

$$\begin{aligned} 2PL + L' &= L_1 \\ MP + M' &= M_1 \end{aligned}$$

so ist

$$u' = AL_1 y^2 + BM_1 y$$

Auf gleiche Weise vorgehend, erhält man für u'' folgenden Werth:

$$u'' = A(2PL_1 + L'_1)y^2 + B(M_1 P + M'_1)y$$

und wenn man der Kürze halber

$$\begin{aligned} 2PL_1 + L'_1 &= L_2 \\ M_1 P + M'_1 &= M_2 \end{aligned}$$

setzt, so ist:

$$u'' = AL_2 y^2 + BM_2 y$$

Eliminirt man nun aus den drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} u &= AL y^2 + BM y \\ u' &= AL_1 y^2 + BM_1 y \\ u'' &= AL_2 y^2 + BM_2 y \end{aligned}$$

das A und B , so erhält man:

$$(L_1 M - L M_1) u'' + (L M_2 - L_2 M) u' + (L_2 M_1 - L_1 M_2) u = 0$$

Aus dieser Gleichung sind die beiden Constanten A und B verschwunden, diese Gleichung gilt daher, wie immer auch A und B beschaffen sind. Es folgt daraus, dass dieser Differentialgleichung genügt wird für

$$u = C_1 L y^2 + C_2 M y$$

unter C_1 und C_2 willkürliche Constante verstanden.

§. 104.

Auf gleiche Weise müsste man vorgehen, wollte man aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} y' &= P y \\ u &= A L y^3 + B M y^2 + C N y \end{aligned}$$

in welchen P , L , M und N gegebene Functionen von x sind, und A , B , C constante Zahlen bezeichnen, das y eliminiren. Man müsste nämlich vorerst u' bestimmen. Dies ist:

$$u' = (3 A L y^2 + 2 B M y + C N) y' + A L' y^3 + B M' y^2 + C N' y$$

und da $y' = P y$ ist, hat man:

$$u' = A (3 L P + L') y^3 + B (2 M P + M') y^2 + C (N P + N') y$$

und wenn man der Kürze halber

$$\begin{aligned} 3 L P + L' &= L_1 \\ 2 M P + M' &= M_1 \\ N P + N' &= N_1 \end{aligned}$$

setzt, so erhält man:

$$u' = A L_1 y^3 + B M_1 y^2 + C N_1 y$$

Auf gleiche Weise könnte man u'' und u''' bestimmen. Thut man dies, so erhält man:

$$\begin{aligned} u'' &= A L_2 y^3 + B M_2 y^2 + C N_2 y \\ u''' &= A L_3 y^3 + B M_3 y^2 + C N_3 y \end{aligned}$$

woselbst

$$\begin{aligned} 3 L_1 P + L'_1 &= L_2 \\ 2 M_1 P + M'_1 &= M_2 \\ N_1 P + N'_1 &= N_2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 3 L_2 P + L'_2 &= L_3 \\ 2 M_2 P + M'_2 &= M_3 \\ N_2 P + N'_2 &= N_3 \end{aligned}$$

ist. Eliminirt man nun aus den vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} u &= A L y^3 + B M y^2 + C N y \\ u' &= A L_1 y^3 + B M_1 y^2 + C N_1 y \\ u'' &= A L_2 y^3 + B M_2 y^2 + C N_2 y \\ u''' &= A L_3 y^3 + B M_3 y^2 + C N_3 y \end{aligned}$$

A , B und C , so erhält man für u eine lineare Differentialgleichung der dritten Ordnung, und dieser genügt:

$$u = C_1 L y^3 + C_2 M y^2 + C_3 N y$$

unter C_1 , C_2 und C_3 willkürliche Constante verstanden.

Leicht ist es nun, das hier aufgestellte Problem zu verallgemeinern.

§. 105.

Aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} y'' &= P y \\ u &= y^2 \end{aligned} \quad (228)$$

soll y eliminirt werden. (Man findet dieses Problem, in allgemeinerer Form aufgestellt, gelöst in Liouville's „*Journal des mathematiques*“, année 1839, S. 429. Liouville eliminirt daselbst y aus den beiden Gleichungen $y'' = P y$ und $u = y^2$).

Um obige Aufgabe zu lösen, bestimme man vorerst u' , dies ist:

$$u' = 2 y y'$$

hierauf bilde man u'' , dies ist:

$$u'' = 2 y y'' + 2 y'^2$$

Setzt man hierin für y'' seinen Werth $P y$, so erhält man:

$$u'' = 2 P y^2 + 2 y'^2$$

oder

$$u'' = 2 P u + 2 y'^2$$

Wird diese Gleichung neuerdings differenzirt, so erhält man:

$$u''' = 2 P u' + 2 P' u + 4 y' y''$$

oder für y'' seinen Werth gesetzt:

$$u''' = 2 P u' + 2 P' u + 4 P y y'$$

Nun ist $2 y y' = u'$, setzt man dies in u''' ein, so erhält man:

$$u''' = 4 P u' + 2 P' u \quad (229)$$

Diese lineare Differentialgleichung dritter Ordnung ist das gesuchte Eliminationsresultat. Wird der vorgelegten Differentialgleichung

$$y'' = P y \quad (228)$$

genügt durch

$$y = A y_1 + B y_2$$

woselbst y_1 und y_2 die particulären Integrale der Gleichung (228), und A und B willkürliche Constante bedeuten, so ist

$$u = (A y_1 + B y_2)^2$$

Bezeichnet man mit $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 \dots$ beliebige andere willkürliche Constante, so kann man, weil die Gleichung (229) eine lineare Differentialgleichung ist, u auch so schreiben:

$$u = (A y_1 + B y_2)^2 + (A_1 y_1 + B_1 y_2)^2 + (A_2 y_1 + B_2 y_2)^2 + \dots$$

oder

$$\begin{aligned} u = & (A^2 + A_1^2 + A_2^2 + \dots) y_1^2 + 2(A B + A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots) y_1 y_2 + \\ & + (B^2 + B_1^2 + B_2^2 + \dots) y_2^2 \end{aligned}$$

wofür man auch schreiben kann:

$$u = C_1 y_1^2 + C_2 y_1 y_2 + C_3 y_2^2$$

und dies ist das vollständige Integrale der Differentialgleichung (229), unter C_1, C_2, C_3 willkürliche Constante verstanden. (Siehe auch das „Journal für die reine und angewandte Mathematik“, herausgegeben von Borchard, 1876, Seite 129, woselbst Herr Fuchs dasselbe Problem behandelt.)

§. 106.

Aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} y'' &= Py \\ u &= Ay^2 + By \end{aligned}$$

in welchen P eine Function von x , und A und B constante Zahlen bezeichnen, soll y eliminirt werden.

Verfährt man auf ähnliche Art, wie im vorhergehenden § verfahren wurde, so erhält man:

$$\begin{aligned} u' &= 2Ayy' + By' \\ u'' &= 2Ayy'' + 2Ay'^2 + By'' \end{aligned}$$

Setzt man für y'' seinen Werth Py , und dann für Ay^2 seinen Werth $u - By$, so erhält man:

$$u'' = 2Pu - BP y + 2Ay'^2$$

Wird diese Gleichung differenzirt, sodann für y'' sein Werth Py , und für $2Ayy'$ sein Werth $u' - By'$ gesetzt, so erhält man nach einfacher Reduction:

$$u''' - 4Pu' - 2P'u = -B(3Py' + P'y)$$

Wird diese Gleichung wieder differenzirt, und für y'' sein Werth gesetzt, so erhält man:

$$(u''' - 4Pu' - 2P'u)' = -B[(3P^2 + P'')y + 4P'y']$$

und eben so kömmt man, auf ähnliche Weise vorgehend, zu der Gleichung:

$$(u''' - 4Pu' - 2P'u)'' = -B[(3P^2 + 5P'')y' + (10PP' + P''')y]$$

Eliminirt man nun aus den letzten drei Gleichungen y und y' , so erhält man eine Gleichung von folgender Gestalt:

$$\begin{aligned} L(u''' - 4Pu' - 2P'u)'' + M(u''' - 4Pu' - 2P'u)' + \\ + N(u''' - 4Pu' - 2P'u) = 0 \end{aligned} \quad (230)$$

in welcher L, M und N folgende Werthe haben:

$$L = 9P^3 + 3PP'' - 4P'^2$$

$$M = 5P'P'' - 27P^2P' - 3PP'''$$

$$N = 40PP'^2 + 4P'P''' - 9P^4 - 18P^2P'' - 5P''^2$$

Wird daher der Gleichung

$$y'' = Py \quad (228)$$

genügt durch

$$y = A_1 y_1 + B_1 y_2$$

woselbst y_1 und y_2 die beiden particulären Integrale der Gleichung (228) und

A_1 und B_1 constante Zahlen bezeichnen, so genügt der Gleichung (230) folgender Werth von u :

$$u = A(A_1 y_1 + B_1 y_2)^2 + B(A_1 y_1 + B_1 y_2)$$

Bezeichnet man mit $A_2, B_2, A_3, B_3 \dots$ beliebige andere willkürliche Constante, so kann man, weil die Gleichung (230) eine lineare Differentialgleichung ist, u auch so schreiben:

$$\begin{aligned} u = & A(A_1 y_1 + B_1 y_2)^2 + B(A_1 y_1 + B_1 y_2) + \\ & + A(A_2 y_1 + B_2 y_2)^2 + B(A_2 y_1 + B_2 y_2) + \\ & + A(A_3 y_1 + B_3 y_2)^2 + B(A_3 y_1 + B_3 y_2) + \\ & + \dots \end{aligned}$$

oder entwickelt:

$$\begin{aligned} u = & A(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \dots) y_1^2 + 2A(A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + \dots) y_1 y_2 + \\ & + A(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + \dots) y_2^2 + B(A_1 + A_2 + A_3 + \dots) y_1 + \\ & + B(B_1 + B_2 + B_3 + \dots) y_2 \end{aligned}$$

und dies gestattet kurz folgende Schreibweise:

$$u = C_1 y_1^2 + C_2 y_1 y_2 + C_3 y_2^2 + C_4 y_1 + C_5 y_2 \quad (231)$$

woselbst C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 willkürliche Constante bedeuten.

Die Gleichung (230) gestattet folgende zwei verschiedene Schreibweisen:

$$\begin{aligned} & (9P^3 + 3PP'' - 4P'^2)(u''' - 4Pu' - 2P'u)'' + \\ & + (5P'P'' - 27P^2P' - 3PP''')(u''' - 4Pu' - 2P'u)' + \\ & + (40PP'^2 + 4P'P''' - 9P^4 - 18P^2P'' - 5P''^2)(u''' - 4Pu' - 2P'u) = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & (9P^3 + 3PP'' - 4P'^2)(u'' - Pu)''' + \\ & + (5P'P'' - 27P^2P' - 3PP''')(u'' - Pu)'' + \\ & + (52PP'^2 + 4P'P''' - 36P^4 - 27P^2P'' - 5P''^2)(u'' - Pu)' + \\ & + (18P^3P' - 36PP'P'' + 9P^2P''' + 28P'^3)(u'' - Pu) = 0 \end{aligned}$$

Aus der ersten Schreibweise sieht man, dass ihr genügt wird für jene Werthe von u , welche der Gleichung

$$u''' - 4Pu' - 2P'u = 0 \quad (229)$$

genügen; aus der zweiten Schreibweise sieht man, dass ihr genügt wird für jene Werthe von u , welche der Gleichung

$$u'' - Pu = 0 \quad (228)$$

genügen.

Wollte man nun so fortgehen, und etwa aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} y'' &= Py \\ u &= Ay^3 + By^2 + Cy \end{aligned}$$

in welchen P eine Function von x , und A, B, C constante Zahlen bezeichnen, das y eliminiren, so würde man, auf ähnliche Weise vorgehend, zu einer linearen Differentialgleichung neunter Ordnung gelangen, deren vollständiges Integrale folgendes ist:

$$u = C_1 y_1^3 + C_2 y_1^2 y_2 + C_3 y_1 y_2^2 + C_4 y_2^3 + C_5 y_1^2 + C_6 y_1 y_2 + C_7 y_2^2 + C_8 y_1 + C_9 y_2$$

woselbst y_1 und y_2 die particulären Integrale der Gleichung $y'' = Py$ sind.

Nicht viel schwieriger wird die Arbeit, wenn man y eliminiren wollte aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} y'' &= Py \\ u &= AX_1 y^2 + BX_2 y \end{aligned}$$

oder aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} y'' &= Py \\ u &= AX_1 y^3 + BX_2 y^2 + CX_3 y \end{aligned}$$

woselbst X_1, X_2, X_3 gegebene Functionen von x bedeuten.

§. 107.

Es soll aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} y''' &= Py' + Qy \\ u &= y^2 \end{aligned}$$

das y eliminirt werden. Zu dem Zwecke bilde ich zunächst u' und u'' . Es ist:

$$\begin{aligned} u' &= 2yy' \\ u'' &= 2yy'' + 2y'^2 \end{aligned}$$

Differenzirt man die letzte Gleichung noch einmal, und setzt man gleich für y''' seinen Werth $Py' + Qy$, so erhält man:

$$u''' = 2y(Py' + Qy) + 6y'y''$$

Setzt man hierin für $2yy'$ seinen Werth u' , und für y^2 seinen Werth u , so erhält man die Gleichung:

$$u''' - Pu' - 2Qu = 6y'y''$$

Wird nun diese Gleichung differenzirt, so erhält man:

$$u'''' - Pu'' - (P' + 2Q)u' - 2Q'u = 6y''^2 + 6y'(Py' + Qy)$$

und wenn man hierin für $2yy'$ seinen Werth u' setzt:

$$u'''' - Pu'' - (P' + 5Q)u' - 2Q'u = 6y''^2 + 6Py'^2$$

Diese Gleichung gibt differenzirt:

$$\begin{aligned} u^{(5)} - Pu''' - (2P' + 5Q)u'' - (P'' + 7Q')u' - 2Q''u &= \\ &= 24Py'y'' + 12Qyy'' + 6P'y'^2 \end{aligned}$$

Setzt man hierin statt

$$6y'y'' \text{ seinen Werth } u''' - Pu' - 2Qu$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} u^{(5)} - Pu''' - (2P' + 5Q)u'' - (P'' + 7Q')u' - 2Q''u &= \\ &= 4P(u''' - Pu' - 2Qu) + 12Qyy'' + 6P'y'^2 \end{aligned}$$

oder geordnet:

$$\begin{aligned} u^{(5)} - 5Pu''' - (2P' + 5Q)u'' + (4P^2 - P'' - 7Q')u' + (8PQ - 2Q'')u &= \\ &= 12Qyy'' + 6P'y'^2 \end{aligned} \quad (232)$$

Wird nun diese Gleichung differenzirt, so erhält man:

$$\begin{aligned} u^{(6)} - 5Pu'''' - (7P' + 5Q)u''' + (4P^2 - 3P'' - 12Q')u'' + \\ + (8PQ - 9Q'' + 8PP' - P''')u' + (8PQ' + 8P'Q - 2Q''')u &= \\ = 12Q'y y'' + 12Qy'y'' + 12Qy(Py' + Qy) + 6P''y'^2 + 12P'y'y'' \end{aligned}$$

Setzt man im zweiten Theile dieser Gleichung

$$\begin{array}{rcccl} \text{statt} & 6y'y'' & \text{seinen Werth} & u''' - Pu' - 2Qu \\ & n & & n & u' \\ & n & & n & u \end{array}$$

so geht dieselbe über in:

$$\begin{aligned} u^{(6)} - 5Pu'''' - (9P' + 7Q)u''' + (4P^2 - 3P'' - 12Q')u'' + \\ + (4PQ - 9Q'' + 10PP' - P''')u' + (8PQ' + 12P'Q - 8Q^2 - 2Q''') = \\ = 12Q'y'y'' + 6P''y'^2 \end{aligned} \quad (233)$$

Eliminirt man nun aus der Gleichung

$$u'' = 2yy'' + 2y'^2$$

und den zwei Gleichungen (232) und (233) die zwei Grössen yy'' und y'^2 , so erhält man bezüglich u eine lineare Differentialgleichung sechster Ordnung, deren vollständiges Integrale wir nun bestimmen wollen.

Bezeichnet man die drei particulären Integrale der Differentialgleichung

$$y''' = Py' + Qy$$

mit y_1 , y_2 und y_3 , so ist

$$y = A_1 y_1 + B_1 y_2 + C_1 y_3$$

woselbst A_1 , B_1 , C_1 willkürliche Constante bezeichnen, und folglich ist

$$u = (A_1 y_1 + B_1 y_2 + C_1 y_3)^2$$

Bezeichnet man mit $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$, $A_4 B_4 C_4 \dots$ andere willkürliche Constante, so gestattet u auch folgende Schreibweisen:

$$u = (A_2 y_1 + B_2 y_2 + C_2 y_3)^2$$

$$u = (A_3 y_1 + B_3 y_2 + C_3 y_3)^2$$

$$u = (A_4 y_1 + B_4 y_2 + C_4 y_3)^2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

und da die Gleichung in u linear ist, so kann man auch schreiben:

$$\begin{aligned} u = (A_1 y_1 + B_1 y_2 + C_1 y_3)^2 + (A_2 y_1 + B_2 y_2 + C_2 y_3)^2 + \\ + (A_3 y_1 + B_3 y_2 + C_3 y_3)^2 + \dots \end{aligned}$$

oder auch folgendermassen:

$$u = L_1 y_1^2 + L_2 y_2^2 + L_3 y_3^2 + L_4 y_1 y_2 + L_5 y_1 y_3 + L_6 y_2 y_3$$

und dies ist das vollständige Integrale der linearen Differentialgleichung sechster Ordnung in u ; hiebei bezeichnen L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , L_5 und L_6 willkürliche Constante.

Wollte man aus den beiden Gleichungen

$$y''' = Py' + Qy$$

$$u = Ay^2 + By$$

das y eliminiren, so gelangt man, denselben Weg einschlagend, zu einer linearen Differentialgleichung neunter Ordnung, deren vollständiges Integrale folgendes ist:

$$u = C_1 y_1^2 + C_2 y_2^2 + C_3 y_3^2 + C_4 y_1 y_2 + C_5 y_1 y_3 + C_6 y_2 y_3 + C_7 y_1 + C_8 y_2 + C_9 y_3$$

§. 108.

Herr Petzval stellt im I. Bande seines Werkes: „Integration der linearen Differentialgleichungen“, und zwar Seite 193 diejenige lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung auf, deren allgemeines Integrale

$$y = C_1 e^{\int \varphi_1 dx} + C_2 e^{\int \varphi_2 dx}$$

ist, unter C_1 und C_2 willkürliche Constante, und unter φ_1 und φ_2 beliebige Functionen von x verstanden.

Nach Petzval ist nämlich diese Differentialgleichung nachfolgende:

$$(\varphi_2 - \varphi_1) y'' - (\varphi_2^2 - \varphi_1^2 + \varphi_2' - \varphi_1') y' + (\varphi_2^2 \varphi_1 - \varphi_1^2 \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2' - \varphi_2 \varphi_1') y = 0$$

Ich will nun φ_1 und φ_2 specialisiren, und setze erstens:

$$e^{\int \varphi_1 dx} = e^{mu}, \quad e^{\int \varphi_2 dx} = e^{nu}$$

woselbst m und n constante Zahlen, und u eine gegebene Function von x bezeichnet.

Hieraus folgen zunächst nachfolgende Gleichungen:

$$\int \varphi_1 dx = mu, \quad \int \varphi_2 dx = nu$$

und sodann:

$$\varphi_1 = mu', \quad \varphi_2 = nu'$$

Setzt man diese Werthe in die Petzval'sche Gleichung, so erhält man eine Gleichung, die durch $n - m$ dividirt, folgende Gestalt hat:

$$u' y'' - [(m + n) u'^2 + u''] y' + mn u'^3 y = 0$$

deren vollständiges Integrale

$$y = C_1 e^{mu} + C_2 e^{nu}$$

ist. Man überzeugt sich leicht, dass, im Falle

$$m = n$$

ist, der Differentialgleichung

$$u' y'' - (2mu'^2 + u'') y' + m^2 u'^3 y = 0 \quad (234)$$

Genüge geleistet wird durch

$$y = e^{mu} (C_1 + C_2 u)$$

woselbst wieder C_1 und C_2 willkürliche Constante bedeuten.

Ich setze zweitens

$$e^{\int \varphi_1 dx} = v^m, \quad e^{\int \varphi_2 dx} = v^n$$

woselbst m und n wieder constante Zahlen, und v eine gegebene Function von x bezeichnet.

Nimmt man beiderseits die Logarithmen, so erhält man:

$$\int \varphi_1 dx = m \log v, \quad \int \varphi_2 dx = n \log v$$

und wenn man differenzirt, so erhält man:

$$\varphi_1 = \frac{m v'}{v}, \quad \varphi_2 = \frac{n v'}{v}$$

Durch Einführung dieser Werthe in die Petzval'sche Gleichung erhält man nach einiger Reduction:

$$v^2 v' y'' - v [v v'' + (m + n - 1) v'^2] y' + m n v'^3 y = 0 \quad (235)$$

Dieser Gleichung genügt also

$$y = C_1 v^m + C_2 v^n$$

woselbst v eine gegebene Function von x , und m und n constante Zahlen bezeichnen.

Setzt man $m = n$, so geht die Gleichung (235) über in:

$$v^2 v' y'' - v [v v'' + (2m - 1) v'^2] y' + m^2 v'^3 y = 0$$

und das Integrale dieser Gleichung ist:

$$y = v^m (C_1 + C_2 \log v)$$

wenn wieder, wie früher, C_1 und C_2 willkürliche Constante bedeuten.

Man könnte auch schneller die Gleichungen (234) und (235) erhalten, wenn man nach den bekannten Methoden verfährt.

So z. B. erhält man aus

$$y = C_1 v^m + C_2 v^n$$

durch Differenziren:

$$y' = C_1 m v^{m-1} v' + C_2 n v^{n-1} v'$$

$$y'' = C_1 m v^{m-2} [v v'' + (m - 1) v'^2] + C_2 n v^{n-2} [v v'' + (n - 1) v'^2]$$

Eliminirt man aus den drei letzten Gleichungen C_1 und C_2 , so erhält man unmittelbar die Gleichung (235).

(Man sehe hierüber Euler's vollständige Anleitung zur Integralrechnung. Aus dem Lateinischen in's Deutsche übersetzt von Jos. Salomon, II. Band, Seite 82.)

Leicht ist es nun, ähnliche Anwendungen auf lineare Differentialgleichungen dritter und höherer Ordnung zu machen.

A n h a n g.

Von zwei Seiten wurden in den letzten Jahren meine „Studien über Integration linearer Differentialgleichungen“ theils zum Gegenstande des Angriffes, theils zum Gegenstande der Ausplünderung gemacht.

Ein Angriff gegen meine Arbeiten rührt von Dr. B. Igel her. Ich könnte denselben ganz mit Stillschweigen übergehen, weil Herr Dr. Igel über Differentialgleichungen auf eine Weise schreibt, wie ein Blinder über die Farben. Aber die kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien hat der ihr von Dr. Igel am 13. Juli 1876 vorgelegten Arbeit die Ehre erwiesen, im LXXIV. Bande ihrer Sitzungsberichte zu publiciren. Dadurch wird es mir zur Pflicht, die Irrthümer und Trugschlüsse blosszulegen, die in dieser Schrift enthalten sind, und ich kann nicht umhin, mein Erstaunen über die Leichtfertigkeit auszudrücken, mit welcher ein Machwerk, das keine gelehrte Gesellschaft der Welt in ihren Schriften abgedruckt hätte, in denen der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien willige Aufnahme gefunden hat.

Der Titel der Igel'schen Schrift ist: „Ueber einige elementare unendliche Reihen.“ In dieser Schrift wird Seite 191 auf eine Arbeit Petzval's hingewiesen. Petzval hat sich nämlich im II. Bande seines Werkes über „Integration linearer Differentialgleichungen“ Seite 136 eine Aufgabe gestellt, die wörtlich folgendermassen lautet:

„Denken wir uns y als eine beliebige Function von x , etwa:

$$y = f(x)$$

„ferner statt x eine neue Veränderliche ξ eingeführt, deren Werth aus „einer gegebenen Gleichung zwischen diesen beiden Variablen

$$\varphi(x, \xi) = 0$$

„hervorgeht; y verwandelt sich dadurch in eine Function von ξ und die „Aufgabe ist: Man soll jeden beliebigen n^{ten} Differentialquotienten von y „nach x ausdrücken durch die Differentialquotienten desselben y nach ξ „genommen.“

Petzval löst diese Aufgabe und findet S. 138 folgende combinatorische Formel:

$$\frac{d^n y}{d x^n} = S \left[\frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma!} \cdot \frac{d^{\alpha+\beta+\gamma+\dots} y}{d \xi^{\alpha+\beta+\gamma+\dots}} \cdot \left(\frac{d \xi}{1! d x} \right)^\alpha \left(\frac{d^2 \xi}{2! d x^2} \right)^\beta \left(\frac{d^3 \xi}{3! d x^3} \right)^\gamma \dots \right]$$

woselbst

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots = n$$

ist, und $\alpha, \beta, \gamma \dots$ ganze positive Zahlen bedeuten, die Nulle mit eingeschlossen.

Ich habe in meinen im Jahre 1860 erschienenen „Studien“, §. 52, dieselbe Aufgabe nach der Petzval'schen Methode für den Specialfall

$$\xi = \frac{1}{x}$$

gelöst, und nachstehende Formel

$$\frac{d^n y}{d \xi^n} = (-1)^n \cdot (n-1)! x^{n+1} \left[\binom{n}{1} \frac{dy}{dx} + \binom{n}{2} x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2!} \binom{n}{3} x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} + \dots \right]$$

gefunden. Sodann bemerkte ich, dass sich diese Formel kürzer auf folgende höchst merkwürdige Weise schreiben lasse:

$$\frac{d^n y}{d \xi^n} = (-1)^n x^{n+1} \frac{d^n (x^{n-1} y)}{dx^n}$$

und nun macht hiezuh Hr. Dr. Igel folgende ganz sinnlose Bemerkung:

„Diese Formel in entwickelter Gestalt hat Hr. Petzval im II. Bande „seines Werkes gegeben, die Hr. Spitzer in obiger Form zusammengezogen hat. Es ist also ein Irrthum, wenn Schlömilch in seiner Analysis, Band II., „Spitzer als den Autor dieser Formel nennt.“

Seite 201 kömmt Hr. Dr. Igel wieder auf eine meiner Arbeiten zurück, schreibt dritthalb Seiten darüber, aber da häuft sich in ununterbrochener Folge Unsinn auf Unsinn, Unwissenheit auf Unwissenheit.

Es ist die Differentialgleichung

$$(1 - x^2) y'' - 2x y' + n(n+1) y = 0$$

welche Hr. Igel in's Auge fasste. Ich habe in der ersten Fortsetzung meiner „Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen“ Seite 41 die Differentialgleichung

$$(x - \alpha)(x - \beta) y'' + (2x - \alpha - \beta) y' - \mu(\mu + 1) y = 0 \quad (85)$$

aufgestellt, und für dieselbe, im Falle μ negativ ist, folgendes Integrale gegeben:

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} (u - \alpha)^{-\mu-1} (u - \beta)^{-\mu-1} (x - u)^{\mu} du + \\ + C_2 \int_{\alpha}^{\beta} (u - \alpha)^{-\mu-1} (u - \beta)^{-\mu-1} (x - u)^{\mu} \log \frac{(x - \alpha)(u - \beta)}{(x - u)(u - \alpha)} du$$

für positive Werthe von $\mu + 1$ aber das nachstehende Integrale:

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} (u - \alpha)^{\mu} (u - \beta)^{\mu} (x - u)^{-\mu-1} du + \\ + C_2 \int_{\alpha}^{\beta} (u - \alpha)^{\mu} (u - \beta)^{\mu} (x - u)^{-\mu-1} \log \frac{(x - \alpha)(u - \beta)}{(x - u)(u - \alpha)} du$$

Ich machte hiezu folgende Bemerkung: Für ganze Werthe von μ kömmt man durch die in den §§. 3 und 7 angegebenen Wege auf einfachere Weise zum Integrale; für $\mu = -1$ hat man

$$y = C_1 + C_2 \log \frac{x - \beta}{x - \alpha} \quad (a)$$

als Integrale obiger Gleichung.

Ich habe dann unmittelbar darauf den Specialfall $\alpha = +1$, $\beta = -1$, $\mu = -n - 1$ behandelt. Die Differentialgleichung lautet für denselben

$$(1 - x^2) y'' - 2x y' + n(n + 1) y = 0$$

und das Integrale dieser Gleichung ist, falls $n + 1$ positiv ist:

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - u^2)^n}{(x - u)^{n+1}} du + C_2 \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - u^2)^n}{(x - u)^{n+1}} \log \frac{(x - 1)(u + 1)}{(x - u)(u - 1)} du \quad (b)$$

und falls n negativ ist:

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} \frac{(x - u)^n du}{(1 - u^2)^{n+1}} + C_2 \int_{-1}^{+1} \frac{(x - u)^n}{(1 - u^2)^{n+1}} \log \frac{(x - 1)(u + 1)}{(x - u)(u - 1)} du$$

Für den Fall, in welchem n ganz und positiv ist, gab ich im Jahre 1862 im VII. Bande von Schlömilch, Kahl und Cantor's Zeitschrift für Mathematik und Physik folgendes Integrale an:

$$y = \frac{d^n}{dx^n} \left[(1 - x^2)^n \int \frac{dx}{(1 - x^2)^{n+1}} \right] \quad (c)$$

(siehe auch meine neuen „Studien über Integration linearer Differentialgleichungen“, 1874, Seite 114.)

Hr. Dr. Igel betrachtet die auf Seite 41 der ersten Fortsetzung meiner Studien aufgestellte Differentialgleichung

$$(1 - x^2) y'' - 2x y' + n(n + 1) y = 0$$

in dem Falle, in welchem $n = 0$ ist, wofür ich auf derselben Seite die Formel (a) aufstellte, welche, da $\alpha = +1$, $\beta = -1$ ist, nun lautet:

$$y = C_1 + C_2 \log \frac{x + 1}{x - 1} \quad (d)$$

Hr. Igel übersieht das, und substituirt $n = 0$ in die Gleichung (b), findet dann:

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} \frac{du}{x - u} + C_2 \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x - u} \log \frac{(x - 1)(u + 1)}{(x - u)(u - 1)} du \quad (e)$$

als Integrale der Gleichung

$$(1 - x^2) y'' - 2x y' = 0 \quad (f)$$

Hr. Igel versucht nun selbstständig diese Gleichung (f), welche bezüglich y' von der ersten Ordnung ist, zu integrieren. Ihm ist das keine kleine Arbeit. Er muss zu den Kugelfunctionen greifen, und findet auf diese Art das in (d) stehende Integrale.

Für die Gleichung (f) sind nun dem Herrn Igel die beiden Integrale bekannt:

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} \frac{du}{x-u} + C_2 \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x-u} \log \frac{(x-1)(u+1)}{(x-u)(u-1)} du \quad (e)$$

und

$$y = C_2 + C_1 \log \frac{x+1}{x-1} \quad (d)$$

Da nun, sagt Dr. Igel, das erste Integrale, nämlich $\int_{-1}^{+1} \frac{du}{x-u}$ gleich $\log \frac{x+1}{x-1}$

ist, so muss das zweite Integrale, nämlich

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x-u} \log \frac{(x-1)(u+1)}{(x-u)(u-1)} du$$

eine Constante sein. Das ist aber ein Fehlschluss, welcher zeigt, dass Hr. Dr. Igel mit den Grundlehren der linearen Differentialgleichungen noch wenig vertraut ist.

Hr. Igel bestrebt sich nun, zu beweisen, dass das Integrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x-u} \log \frac{(x-1)(u+1)}{(x-u)(u-1)} du$$

nicht eine Constante ist, sondern dass dies Integrale auf $\log \frac{x+1}{x-1}$ führt. Das Integrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x-u} \log \frac{(x-1)(u+1)}{(x-u)(u-1)} du$$

sagt Igel, zerlegt sich in:

$$\log(x-1) \int_{-1}^{+1} \frac{du}{x-u} - \int_{-1}^{+1} \frac{\log(x-u)}{x-u} du + \int_{-1}^{+1} \log \frac{u+1}{u-1} \cdot \frac{du}{x-u}$$

Das erste ist $\log(x-1) \log \frac{x+1}{x-1}$, das zweite ist $-\frac{1}{2} \left[\log \frac{x+1}{x-1} \right]^2$; dies ist aber falsch, denn das zweite Integrale ist nicht, wie Hr. Igel glaubt, $-\frac{1}{2} \left[\log \frac{x+1}{x-1} \right]^2$, sondern es ist:

$$-\int_{-1}^{+1} \frac{\log(x-u)}{x-u} du = \frac{1}{2} \left[\log(x-1) \right]^2 - \frac{1}{2} \left[\log(x+1) \right]^2$$

Das dritte Integrale, nämlich:

$$\int_{-1}^{+1} \log \frac{u+1}{u-1} \frac{du}{x-u}$$

behandelt Hr. Igel auf folgende Weise; er setzt:

$$u = \frac{1}{v}$$

erhält hiedurch

$$- \int_{-1}^{+1} \frac{dv}{v(vx-1)} \log \frac{1+v}{1-v}$$

oder in Reihen entwickelt:

$$- 2 \int_{-1}^{+1} \frac{dv}{xv-1} \left(1 + \frac{1}{3}v^2 + \frac{1}{5}v^4 + \dots \right)$$

Nun setzt er hierein

$$v = \frac{t}{x}$$

und findet:

$$- 2 \int_{-\frac{1}{x}}^{+\frac{1}{x}} \frac{dt}{t-1} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{t^2}{x^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{t^4}{x^5} + \dots \right)$$

Dies ist wieder falsch, denn die Grenzen des Integrales sind falsch, und nun macht Hr. Dr. Igel einen Salto mortale und behauptet: „Man sieht leicht, dass auch dies auf $\log \frac{x+1}{x-1}$ führt.“

So was nennt Hr. Igel einen Beweis, und solche Beweise hält die kais. Akademie der Wissenschaften für werth, in ihren Druckschriften publicirt zu werden.

Dem Hrn. Igel scheint aber vor seiner eigenen Beweisführung bange zu werden, denn kaum ist er mit diesem seinem Beweise zu Ende, so führt er einen zweiten Beweis, der aber wieder total missglückt ist.

Hr. Igel bezeichnet das zweite particuläre Integrale mit y_2 und beweist sodann, dass

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{2 \log(-1)}{x^2-1}$$

ist; hieraus folgert er:

$$y_2 = C \log \frac{x+1}{x-1}$$

was aber falsch ist, weil aus obiger Gleichung

$$y_2 = C_1 + C_2 \log \frac{x+1}{x-1}$$

folgt. Es wird aber durch dies nicht das bewiesen, was Hr. Igel beweisen wollte, sondern gerade das Entgegengesetzte.

Ich komme nun auf Dr. Anton Winkler zu sprechen, der meine „Studien über Integration linearer Differentialgleichungen“ förmlich geplündert und nachdem ich dies nicht so ohne Weiteres hinnehmen wollte, mich mit Invectiven überhäuft hat.

Herr Dr. Winkler hat am 30. Jänner 1873 der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien eine Arbeit vorgelegt über die Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Coefficienten lineare Functionen der unabhängigen Veränderlichen sind. In dieser Arbeit, welche auch nicht einen einzigen neuen gesunden Gedanken enthält, erwähnt Hr. Winkler blos Euler und Petzval, alle anderen Mathematiker, die sich mit dem gleichen Gegenstande beschäftigten, ignorirt er vornehm. Ich habe die Arbeit durchgesehen und habe daselbst viele alte Bekannte gefunden, die aus meinen Studien geraden Wegs in die Arbeit des Hrn. Winkler hinübergewandert sind und sich dort als angebliche Kinder seines Geistes präsentieren. So z. B. betrachtet Hr. Winkler Seite 149 des LXVII^{sten} Bandes der Sitzungsberichte die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2k \frac{dy}{dx} + (l_0 x + k^2) y = 0$$

und findet hiefür auf Seite 153 die beiden particulären Integrale:

$$y_1 = e^{-kx - \frac{2}{3}x\sqrt{-l_0 x}} \int_0^1 e^{\frac{4}{3}xu\sqrt{-l_0 x}} [u(1-u)]^{-\frac{1}{3}} du$$

$$y_2 = x e^{-kx - \frac{2}{3}x\sqrt{-l_0 x}} \int_0^1 e^{\frac{4}{3}xu\sqrt{-l_0 x}} [u(1-u)]^{-\frac{1}{3}} du$$

Er macht hiezu nachstehende Bemerkung:

Diese beiden Integrale sind nicht neu, und so viel mir bekannt, zuerst von Hrn. Petzval auf anderem Wege und in anderer Form gefunden worden.

Das ist, mit Verlaub, eine Unwahrheit! Wo steht denn dieses Integrale in Petzval's Werk? Petzval hat nie die oben stehende Gleichung integriert, sondern es findet sich Seite 56 im I. Bande des Petzval'schen Werkes über Integration linearer Differentialgleichungen die viel allgemeinere Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

mittelst der Laplace'schen Methode integriert. Ich habe in meinen Studien für die Gleichung

$$a_2 y'' + a_1 y' + (a_0 + x) y = 0 \quad (141)$$

zuerst denselben Weg verfolgt, und so nachstehendes Integrale gefunden,

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} \left[C_1 \mu_1 e^{(a_0 + x)\mu_1 u + \frac{a_1}{2}\mu_1^2 u^2} + \right. \\ \left. + C_2 \mu_2 e^{(a_0 + x)\mu_2 u + \frac{a_1}{2}\mu_2^2 u^2} + \right. \\ \left. + C_3 \mu_3 e^{(a_0 + x)\mu_3 u + \frac{a_1}{2}\mu_3^2 u^2} \right] du \quad (144)$$

welches total verschieden ist von dem, welches Hr. Winkler oben aufstellte.

Sodann integrierte ich dieselbe Gleichung (141) auf andere Weise. Ich setzte nämlich zuerst

$$y = e^{kx} z$$

woselbst

$$k = -\frac{a_1}{2a_2}$$

ist, sodann setzte ich

$$\xi = (a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + x)^{\frac{3}{2}}$$

und fand, wenn man der Kürze halber

$$\frac{2}{3\sqrt{-a_2}} = \mu$$

setzt, die Gleichung

$$\xi \frac{d^2 z}{d\xi^2} + \frac{1}{3} \frac{dz}{d\xi} - \mu^2 \xi z = 0$$

deren Integrale nach Formel (31) dieser Vorlesungen folgendes ist:

$$z = C_1 \int_{-\mu}^{+\mu} e^{u\xi} (u^2 - \mu^2)^{-\frac{5}{6}} du + C_2 \xi^{\frac{2}{3}} \int_{-\mu}^{+\mu} e^{u\xi} (u^2 - \mu^2)^{-\frac{1}{6}} du$$

es ist somit:

$$y = C_1 e^{kx} \int_{-\mu}^{+\mu} e^{u\xi} (u^2 - \mu^2)^{-\frac{5}{6}} du + C_2 e^{kx} \xi^{\frac{2}{3}} \int_{-\mu}^{+\mu} e^{u\xi} (u^2 - \mu^2)^{-\frac{1}{6}} du$$

Setzt man weiter

$$u = -\mu + 2\mu v$$

so erhält man:

$$y = A_1 e^{kx - \mu\xi} \int_0^1 e^{2\mu v\xi} [v(1-v)]^{-\frac{5}{6}} dv + A_2 e^{kx - \mu\xi} \xi^{\frac{2}{3}} \int_0^1 e^{2\mu v\xi} [v(1-v)]^{-\frac{1}{6}} dv$$

was ziemlich nahe mit dem Integrale übereinstimmt, das Hr. Winkler aufstellte und das er bei Petzval gefunden zu haben vorgibt.

Hr. Winkler wendet sich sodann an die Integration der Gleichung

$$(H_0 t + H) \frac{d^2 y}{dt^2} + 2(K_0 t + K) \frac{dy}{dt} + (L_0 t + L) y = 0$$

bringt sie auf die Form

$$x y'' + 2(k_0 x + k) y' + (l_0 x + l) y = 0$$

und findet für dieselbe die beiden particulären Integrale:

$$y_1 = e^{-(k_0 + \sqrt{k_0^2 - l_0})x} \int_{u_1}^{u_2} e^{y u x} u^{\alpha-1} (c-u)^{\beta-1} du$$

$$y_2 = x^{1-2k} e^{-(k_0 + \sqrt{k_0^2 - l_0})x} \int_{u_1}^{u_2} e^{y u x} u^{-\beta} (c-u)^{-\alpha} du$$

Haben diese beiden particulären Integrale nicht eine höchst verdächtige Aehnlichkeit mit den von mir gefundenen, welche lauten:

$$y_1 = \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du$$

$$y_2 = (m + x)^{1-A-B} \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{-B} (u - \beta)^{-A} du$$

Will man die Aehnlichkeit noch vergrössern, so setze man in den von mir gefundenen Integralen

$$u = \alpha + \frac{(\beta - \alpha)}{c} \cdot w$$

ferner

$$\beta - \alpha = \gamma$$

$$m + x = \xi$$

$$A + B = s$$

man findet sodann:

$$y_1 = e^{\alpha \xi} \int_0^c e^{\frac{\gamma w}{c} \xi} w^{A-1} (c - w)^{B-1} dw$$

$$y_2 = \xi^{1-s} e^{\alpha \xi} \int_0^c e^{\frac{\gamma w}{c} \xi} w^{-B} (c - w)^{-A} dw$$

Hr. Winkler betrachtet sodann den Fall $2k = 1$ und findet ein particuläres Integral in logarithmischer Gestalt. Hier citirt Hr. Winkler eine Arbeit Euler's; ich war im ersten Moment ganz erstaunt, denn ich war der Meinung, dass ich es war, der zuerst in den in Rede stehenden Differentialgleichungen logarithmische Integrale fand; ich schlug rasch die Arbeit Euler's nach und war nicht wenig beruhigt, als ich fand, dass Euler bei den Differentialgleichungen der Form

$$x^2 y'' + (2a + 1) x y' + a^2 y = 0$$

zu logarithmischen Integralen gelangte, denen in der That genügt wird für

$$y = x^{-a} (C_1 + C_2 \log x)$$

was auch schon längst allgemein bekannt und in allen Lehrbüchern angeführt ist.

Bei der Differentialgleichung

$$x y'' + (n + v + 2 - ax) y' - a(n + 1) y = 0$$

aber, welche Euler behandelt, findet derselbe bloß das eine particuläre Integrale

$$y = \int_0^a e^{ux} u^n (a - u)^v du$$

von einem logarithmischen Integrale ist aber daselbst keine Spur zu bemerken.

Hr. Winkler kömmt dann zu der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a t^n \frac{dy}{dt} + b t^{n-1} y = 0$$

deren Integration, wie Hr. Winkler sagt, seines Wissens für beliebige Werthe der constanten Grössen a , b , n nicht bekannt ist.

Ich habe in meinen Studien, erste Fortsetzung Seite 53 die Differentialgleichung

$$y'' = x^m (A x y' + B y)$$

welche ja offenbar dieselbe ist, welche Hr. Winkler betrachtet, vollständig integrieren gelehrt.

Am 7. Jänner 1875 publicirt Hr. Winkler wieder eine Arbeit über Integration linearer Differentialgleichungen; es sind dieselben, die ich in der ersten Fortsetzung meiner Studien Seite 10 integrieren lehrte. Ich stellte nämlich daselbst die Gleichung

$$a_2 (x - \alpha)^2 y'' + (a_1 + b_1 x) y' + a_0 y = 0$$

auf, führte in selbe neue Variable ξ und z ein mittelst der Gleichungen:

$$\xi = \frac{1}{x - \alpha}, \quad y = \xi^k z$$

und erhielt hiedurch eine Gleichung der Form

$$(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

die ich vollständig integrieren lehrte. Hr. Winkler erwähnt auch hier meine Arbeit nicht.

Hr. Winkler schreibt meine Gleichung in der Form

$$x^2 y'' + [x(a + b + 1) + c] y' + a b y = 0$$

auf und gibt, im Falle a und b positive echte Brüche sind, folgende particuläre Integrale an:

$$y_1 = x^{-a} \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{-b} e^{\frac{cu}{x}} du$$

$$y_2 = x^{-b} \int_0^1 u^{b-1} (1-u)^{-a} e^{\frac{cu}{x}} du$$

Diese particulären Integrale ergeben sich unmittelbar aus meinen Studien.

Setzt man nämlich in obige Gleichung, nach Vorschrift meiner Studien,

$$x = \frac{1}{\xi}$$

so erhält man

$$\xi^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} - \xi [a + b - 1 - c\xi] \frac{dy}{d\xi} + a b y = 0$$

Setzt man weiter, nach der in meinen Studien gegebenen Vorschrift,

$$y = \xi^a z$$

so erhält man die Gleichung

$$\xi \frac{d^2 z}{d\xi^2} + (a - b + 1 - c\xi) \frac{dz}{d\xi} - a c z = 0$$

deren vollständiges Integrale ist:

$$z = C_1 \int_0^c e^{u\xi} u^{a-1} (u-c)^{-b} du + C_2 \xi^{b-a} \int_0^c e^{u\xi} u^{b-1} (u-c)^{-a} du$$

Es ist somit

$$y = C_1 x^{-a} \int_0^{\frac{u}{x}} e^{\frac{u}{x}} u^{a-1} (u-c)^{-b} du + C_2 x^{-b} \int_0^{\frac{u}{x}} e^{\frac{u}{x}} u^{b-1} (u-c)^{-a} du$$

Will man die Winkler'sche Formel haben, so setze man $u = cw$.

Hr. Dr. Winkler, der, wie ich so eben zeigte, wiederholt meine Arbeiten — um abermals einen milden Ausdruck zu gebrauchen — ausgenützt hat, erwähnt hiebei nie meinen Namen. Ich muss gestehen, dass ich eine solche Handlungsweise nicht recht verstehe. Was will denn Hr. Winkler mit entwendeten particulären Integralen einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung anfangen? Dem grossen Publicum ist es herzlich gleichgiltig, ob Hr. Dr. Winkler Plagiate für sein geistiges Eigenthum ausgibt, die Fachcollegen aber vermag in dieser Beziehung selbst die höchste Unverfrorenheit im Auftreten nicht zu täuschen.

Dass ich endlich gegenüber einer solchen Handlungsweise nicht länger schweigen wollte, versteht sich wohl von selbst.

Ich richtete am 9. December 1875 an das Präsidium der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien folgendes Schreiben, welches ich am 20. Jänner 1876 der „Presse“ zum Abdrucke einsandte:

An das hohe Präsidium der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

Ich habe mich seit mehr als zwanzig Jahren mit dem Studium der Integration linearer Differential-Gleichungen beschäftigt und bin nach und nach zu Resultaten gelangt, die mir werth schienen, veröffentlicht zu werden. So entstand eine Reihe von kleineren Abhandlungen, die ich in den mathematischen Journalen von Crelle, Grunert, Schlömilch, Clebsch und Neumann, sowie in den Sitzungsberichten der Pariser und Wiener Akademie der Wissenschaften veröffentlichte.

Im Jahre 1860 habe ich meine an verschiedenen Orten zerstreuten Arbeiten gesammelt und geordnet, und dieselben in einem selbständigen Werke unter dem Titel „Studien über die Integration linearer Differential-Gleichungen“ veröffentlicht. Im Jahre 1861 publicirte ich die erste und im Jahre 1862 die zweite Fortsetzung meiner Studien; im Jahre 1874 publicirte ich wieder ein Werk unter dem Titel „Neue Studien über die Integration linearer Differential-Gleichungen.“

Diese meine Arbeiten erfreuten sich einer günstigen Aufnahme. Viele derselben gingen in Lehrbücher über; ich verweise auf die Werke von Dienger in Karlsruhe, von Schlömilch in Dresden, von Hofrath Herr in Wien, von Dr. A. Benthem in Enschedé (Niederlande).

Vor Kurzem kamen mir die letzten Jahrgänge der Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu, worin sich zwei Abhandlungen über Integration linearer Differential-Gleichungen befinden, die am 30. Juni 1873 und am 7. Jänner 1875 der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften von Dr. A. Winkler vorgelegt wurden.

Natürlich interessirten mich diese Arbeiten. Wie war ich aber überrascht und betroffen, als ich fand, dass Herr Professor Winkler die Resultate meiner Arbeiten vom Jahre 1860 (1. Abschnitt) und 1861 (3. Abschnitt) wiedergegeben, ohne denselben auch nur das geringste nennenswerthe Neue zuzufügen und es nicht verschmähte, diese Arbeit als das Ergebniss seiner Studien der Akademie der Wissenschaften vorzulegen.

Lange Jahre habe ich mich mit dem Studium der Integration linearer Differential-Gleichungen geplagt. Zahllose Nächte habe ich geopfert und über den Gegenstand nachgedacht und habe mich glücklich gefühlt, wenn ich einen und den anderen Satz gefunden, und wenn dann hie und da von einer Seite meinen Arbeiten Anerkennung gezollt wurde, so fand ich hierin meinen schönsten Lohn.

Nun hat ein wirkliches Mitglied der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften sich mein geistiges Eigenthum angeeignet. So wende ich mich denn hiemit an die kaiserliche Akademie der Wissenschaften, deren Aufgabe es ist, wissenschaftliche Bestrebungen auch von Nichtmitgliedern in Schutz zu nehmen, mit der ehrfurchtsvollen Bitte, meine geistigen Arbeiten zu schützen und nicht zuzugeben, dass dieselben unter fremdem Namen in ihren Schriften abgedruckt erscheinen.

Indem ich bitte, von dieser meiner Verwahrung Act zu nehmen, wolle das hohe Präsidium zur Constatirung meiner Angaben das Geeignete veranlassen und die Resultate dieser Erhebung in den Sitzungsberichten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften veröffentlichen, damit das mathematische Publicum von dem Sachverhalte in Kenntniss gesetzt werde.

Wien, 9. December 1875. Hochachtungsvoll

Professor Simon Spitzer.

Kaum hatte ich dieses Schreiben veröffentlicht, erschien alsbald eine Antwort von Hrn. Dr. Winkler. Ihm war bei Abfassung seiner Arbeiten, die er in den Akademie-Schriften publicirte, das Rechtsgefühl, das Gefühl für Mein und Dein abhanden gekommen, und um sich zu rechtfertigen, blieb ihm nichts übrig, als zur Unwahrheit zu greifen. Hr. Winkler schreibt:

Verehrliche Redaction!

In einem an den Präsidenten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften adressirten Schreiben, welches Herr Professor Simon Spitzer in der „Presse“ der Oeffentlichkeit übergeben hat, werde ich geradezu eines an diesem Herrn verübten literarischen Diebstahls bezichtigt, ohne dass derselbe für diese Beschuldigung auch nur den geringsten Beweis beigebracht hätte. Indem ich mir alle weiteren Schritte vorbehalte, möge Folgendes zur vorläufigen Orientirung des Publicums dienen:

1. In meinen der kaiserlichen Akademie am 30. Jänner 1873 und 7. Jänner 1875 vorgelegten Abhandlungen stellte ich mir die früher von Anderen kaum versuchte, geschweige denn vollständig gelöste Aufgabe, gewisse Differentialgleichungen in allen Fällen und mit Ausschluss jeder anderen Form bloß durch sogenannte Quadraturen zu integrieren. Dieses Problem ist in meinen erwähnten Abhandlungen vollständig gelöst; meine Lösungen (sie sind insgesamt mit römischen Ziffern bezeichnet) erstrecken sich auf alle denkbaren Fälle und sind durchaus neu. Nicht eine derselben kommt im ersten und dritten Abschnitt der 1860 und 1861 erschienenen „Studien“ des Professors Spitzer vor. Es ist daher unwahr, wenn Letzterer in seinem Schreiben sagt, „ich hätte die Resultate seiner Arbeiten wiedergegeben, ohne denselben auch nur das geringste Neue hinzuzufügen“.

2. Die von früheren Mathematikern gefundenen, in den meisten Fällen unvollständigen, in anderen geradezu unbrauchbaren, in allen Fällen aber weniger allgemeinen Lösungen sind in meinen beiden Arbeiten nur nebenbei und bloß der Vergleichung wegen angeführt, aber auf das Sorgfältigste in jedem einzelnen Falle ausdrücklich als bereits bekannt bezeichnet, so dass auch der leiseste Vorwurf von mir fern bleiben muss, als wollte ich irgend etwas von Anderen Gefundenes mir selbst zueignen. Es ist daher wieder unwahr, wenn Professor Simon Spitzer in seinem Schreiben die Behauptung aufstellt, „ich hätte es nicht verschmäht, mir fremdes geistiges Eigenthum anzueignen und unter meinem Namen in den Schriften der Akademie abdrucken zu lassen“.

3. Die in den „Studien“ Seite 8, 32, 35, 38 und 40 des ersten Abschnittes abgedruckten Formeln sind die einzigen, welche auf das mir gestellte Problem bezogen werden können. Sie umfassen aber nicht einmal alle schon früher bekannt gewesenen, wie bemerkt, durchaus

defecten Lösungen dieses Problems; aber auch jene wenigen sind nicht von Herrn Simon Spitzer, sondern von Mathematikern, und zwar von Euler, Poisson, Moigno, Petzval, Weiler etc., gefunden worden, aus deren Schriften sie Jener mit ganz unwesentlichen Abänderungen, mit anderen Buchstaben etc., in die „Studien“ herübergenommen, zuweilen aber auch buchstäblich abgeschrieben hat, ohne anzugeben, dass und in welchem Werke er sie „erforscht“ oder „gefunden“ hat. Die „Studien“ Spitzer's sind daher bezüglich des von mir behandelten Problems eine blosser Compilation fremder Arbeiten, ohne jeden selbständigen Werth und es ist über alle Massen unqualificirbar, wenn Herr Simon Spitzer in seinem Schreiben das den genannten Mathematikern entnommene Material seiner „Studien“ sein „geistiges Eigenthum“ nennt.

Die Jeremiade jenes Herrn über „zahllose geopfert Nächte“ erweckt ein Mitleid, das ich theile; denn wer zahllose Nächte opfern, ja sogar vieles „Nachdenken“ darauf verwenden musste, um fünf Formeln anderen Werken zu entnehmen, in etwas andere Gestalt zu bringen, dann seinen „Studien“ einzuverleiben, der verdient wahrlich alles Mitleid.

Alles hier Angeführte und noch mehreres Andere ist der Gegenstand eines einlässlichen, druckfertig vor mir liegenden Nachweises, worin Herr Spitzer vielleicht öfter, als es ihm lieb sein wird, „genannt“ ist.

4. Da Herr Simon Spitzer den Beweis der Wahrheit für seine verleumderischen Behauptungen schuldig geblieben ist, so biete ich ihm Gelegenheit, denselben wenigstens theilweise dadurch nachzuliefern, dass er von der sehr einfachen Differentialgleichung

$$12xy'' + (7 - 12x)y' + 800y = 0$$

zwei verschiedene Lösungen, jedoch ausschliesslich in Form von (endlichen) Quadraturen, und zwar unmittelbar nach zwei in den „Studien“ wirklich stehenden Formeln (nicht nach anderen!) berechnet, die erweislich Herrn Simon Spitzer's „geistiges Eigenthum“ sind. Damit Herr Spitzer an dem vollen Ernst dieser Aufforderung nicht zweifeln kann, wird beigefügt, dass ich selbst die beiden Lösungen aus der ersten meiner Abhandlungen bereits berechnet habe. Ich fordere ihn auf, die bezeichneten Lösungen binnen vier Tagen in der „Presse“ zu veröffentlichen; ausweichende Redensarten nehme ich nicht an und Nichtwollen wird nicht blos von mir als Nichtkönnen, dann aber auch das ganze in der „Presse“ publicirte Schreiben als das erklärt werden, was es ist.

Dr. A. Winkler,

Professor der Mathematik an der k. k. technischen Hochschule.

Wien, 22. Jänner 1876.

Ich habe auf die unwahren Anschuldigungen und die hämischen Bemerkungen, die in diesem Schreiben niedergelegt sind, nicht geantwortet. Es ist auch nicht leicht, dies zu thun. Man weiss ja, dass sich, wie ein Italiener sagte, in drei Zeilen so viel Schiefes zusammendrängen lässt, dass dreitausend Zeilen dazu erforderlich seien, es gerade zu renken. Und dazu hatte ich weder Lust noch Zeit. Ich habe freilich in meinen „Studien“ die Arbeiten von Borchard, Euler, Jacoby, Laplace, Liouville, Lobatto, Mainardi, Petzval, Poisson, Serret, Scherk, Schlömilch, Wantzel, Weiler benützt, ich habe sie aber auch alle in meinen Studien citirt, ich habe mich gewissermassen auf die Schultern dieser Männer gestellt und weiter geforscht. Seit wann ist denn das anstössig? Ist denn das nicht der einzige Weg, den alle redlichen Forscher einschlagen, wenn sie weiter forschen? Hr. Dr. Winkler thut so was freilich nicht, Hr. Dr. Winkler forscht blos aus meinem Buche, schreibt blos andere Buchstaben und gibt es dann als sein geistiges Eigenthum aus. Und das nennt Hr. Dr. Winkler wissenschaft-

liche Arbeit. Der ganze Streit zwischen mir und Herrn Winckler wäre unterblieben, wenn Hr. Dr. Winckler da, wo er meine „Studien“ ausnützte, sie auch ehrlich citirt hätte. Meine Antwort auf obiges Schreiben des Hrn. Dr. Winckler war die:

Herrn Professor A. Winckler!

Meinen an das hohe Präsidium der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften adressirten und im Morgenblatte der „Presse“ vom 21. Jänner veröffentlichten Brief habe ich schon den 9. December 1875 der kaiserlichen Akademie überreicht; dieser wurde vom Herrn Präsidenten, wie mir von ihm selbst mitgetheilt wurde, Ihnen sofort zugeschickt. Ich möchte nicht unbescheiden sein, aber ich denke doch in soweit als Mathematiker zu gelten, dass Sie eine so schwere Anklage von mir nicht ganz ignoriren durften. Da Sie dennoch durch volle sechs Wochen schwiegen, musste ich nothgedrungen die etwaige Absicht, die Angelegenheit zu vertuschen, hintertreiben. In der That, mit der Publication des Briefes an das hohe Präsidium der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften war auch schon am zweiten Tage Ihrerseits das Schweigen gebrochen und ihre Entgegnung fix und fertig. Und welche Entgegnung! Laut schreien Sie, unwahr, unwahr, Alles unwahr! und nur Spitzer hat Alles abgeschrieben und werfen sich zum Schiedsrichter Ihrer eigenen Sache auf!

Lesen Sie hingegen, welche Methode ich zur Constatirung der Wahrheit angerathen. In dem Briefe an die kaiserliche Akademie heisst es am Schlusse:

„Indem ich bitte, von dieser meiner Verwahrung Act zu nehmen, wolle das hohe Präsidium zur Constatirung meiner Angaben das Geeignete veranlassen und die Resultate dieser Erhebung in den Sitzungsberichten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften veröffentlichen, damit das mathematische Publicum von dem Sachverhalte in Kenntniss gesetzt werde.“

Ich habe also, obgleich im Bewusstsein meines Rechtes, die directe Anerkennung desselben nicht begehrt, sondern gebeten, das Geeignete zu veranlassen, d. h., wie sich von selbst versteht, ein fachkundiges Comité nach Belieben zu bestellen und die Resultate dieser Erhebung in den Sitzungsberichten zu veröffentlichen.

Ich habe meine Angelegenheit somit unbedingt dem Ausspruche von Fachmännern anvertraut; nicht auf offenem Markte wollte ich einen wissenschaftlichen Streit vor Laien zur Entscheidung bringen. Sie werden anerkennen, Herr Professor, dass Sie im Interesse Ihrer eigenen Ehre gehandelt hätten, wenn Sie, überzeugt von der Wahrheit Ihrer Behauptung, an das löbliche Präsidium die gleiche Bitte gestellt hätten — und insolange das nicht geschieht und das Comité Sie nicht vollkommen freispricht, halte ich meine Anklage ungeschmälert aufrecht.

Ich werde wohl in einer eingehenden Arbeit den Beweis meiner Anklage führen und erhoffe mir in Folge dieser, dass Sie, Herr Professor, in den Annalen der Mathematik — wenn auch wirkliches Mitglied der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften — als das gelten werden, was Sie wirklich sind.

Ich entsage jeder weiteren Polemik in den Tagsjournalen. In den Fachjournalen begegnen wir uns wieder. Zanken und Raufen auf offener Strasse schickt sich nicht; ich wollte, wie mein Vorgehen von Anfang beweist, es vermieden haben und bot Ihnen Zeit genug, einen Strassenkampf zu vermeiden. Die Wahl der Waffen und des Kampfplatzes hatten Sie, Herr Professor, Sie haben beide schlecht gewählt.

Nur noch kurz, was die mir von Ihnen gestellte Aufgabe, eine Differential-Gleichung zweiter Ordnung vollständig zu integriren, betrifft, scheinen Sie wirklich, Herr Professor, glauben machen zu wollen, dass Sie meine Studien über die Integration linearer Differential-Gleichungen nicht gelesen haben, denn dort finden Sie im §. 14 des ersten Abschnittes diese Aufgabe ohnehin schon gelöst.

Wien, 24. Jänner 1876.

Simon Spitzer.

Auf dieses Schreiben antwortet Hr. Winckler wieder mit Unwahrheiten und aus der Luft gegriffenen Anschuldigungen, besudelt hiebei meine Arbeiten, die er, wie ich aus dem Schlusse seines Schreibens bemerkte, nicht einmal gehörig versteht. Seine Entgegnung lautet:

Verehrliche Redaction!

In der gestrigen Nummer der „Presse“ stellt Herr Simon Spitzer eine Anzahl neuer Behauptungen auf, die ich als ebensovielen wissentliche Unwahrheiten zurückweisen muss.

Der am 9. December v. J. von ihm an den Herrn Präsidenten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften gerichtete Brief wurde mir nicht „sofort zugeschickt“, sondern ist überhaupt nie in meine Hände gelangt und mir seinem Inhalte nach nie bekannt geworden. Was mir davon, und zwar erst am 17. December, mündlich mitgetheilt worden ist, betraf allein die Behauptung des Herrn Simon Spitzer, „ich hätte in meinen Abhandlungen bloss dessen „geistiges Eigenthum“ wiedergegeben, ohne das geringste Neue hinzuzufügen“. Dieselbe Behauptung, noch bekräftigt durch einige Schimpfwörter, hatte übrigens Herr Simon Spitzer früher schon Herrn Director Dr. Stefan gegenüber aufgestellt, durch welchen ich sie zuerst erfahren habe.

Es ist ferner unwahr, dass ich einer Würdigung jener Behauptungen durch ein „Comité“ mich entgegengestellt und „die Angelegenheit zu vertuschen“ gesucht habe. Denn schon der Umstand, dass Herr Simon Spitzer seine Klagen nicht in einem „Fachjournal“, sondern bei der kaiserlichen Akademie, welche seit langen Jahren grundsätzlich alle Polemik und namentlich alle sogenannten Prioritäts-Streitigkeiten von ihren Schriften und Verhandlungen mit Recht möglichst fern hält, anzubringen suchte, liess deutlich genug erkennen, dass es ihm zu irgend einem Zweck um einen effectvollen Zeitungs-scan-dal schon anfänglich zu thun war, den er dann in der That wiederholt androhen liess und zuletzt auch in Scene gesetzt hat. Einen solchen, dem Ansehen der Wissenschaft und noch mehr des Instituts, an welchem Herr Simon Spitzer und ich als Lehrer angestellt sind, gleich schädlichen Scandal (auch wenn derselbe noch kein „Strassenkampf“ ist) hintanzuhalten war vom Anfange an mein eifrigstes Bemühen; denn ich war es, der schon am 19. December an das Präsidium das Ansuchen stellte, über folgende von mir in objectivster Weise formulirten Fragen, deren Veröffentlichung jetzt nichts mehr entgegensteht, eine fachmännische Aeusserung einholen zu wollen:

I. Sind die im ersten und dritten Abschnitt der „Studien“ des Professors Spitzer enthaltenen Formeln und Methoden, so weit sie die auch von Professor Winckler in seinen beiden Abhandlungen vom 30. Jänner 1873 und 7. Jänner 1875 bearbeiteten Themata betreffen, ausschliesslich geistiges Eigenthum des Professors Spitzer oder sind dieselben, wie Professor Winckler behauptet, nur eine mehr oder weniger zweckmässige Zusammenstellung der Formeln und Methoden älterer Mathematiker?

II. Hat Professor Winckler in jenen beiden Abhandlungen die schon früher bekannten Lösungen der betreffenden Probleme nicht ausdrücklich als bekannt vorausgesetzt, respective bezeichnet, sondern als seine Erfindung hingestellt und sind die in jenen Abhandlungen mit römischen Ziffern bezeichneten Formeln nicht die eigene Arbeit des Professors Winckler, sondern bereits in den „Studien“ des Professors Spitzer enthalten und denselben entnommen, hat also, wie Letzterer behauptet, Professor Winckler in seinen beiden Abhandlungen jenen „Studien“ nicht das geringste Neue hinzugefügt? — Von der Unstichhaltigkeit des gegen mich gerichteten Angriffs auf das Beste überzeugt, habe ich dieses geschrieben!

Wenn nun amtlich mein Ansuchen keinen Erfolg hatte und auch von dem Schreiben des Herrn Simon Spitzer in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe keine Mittheilung gemacht wurde, so mochte dies seinen Grund darin haben, dass jener Brief, wie aus seinem jetzt (vielleicht richtig) publicirten Inhalte hervorgeht, lediglich Denunciationen enthält und der Schreiber desselben, uneingedenk der Regel, dass dem Ankläger die Beweis-pflicht obliegt, es weder der Mühe werth, noch als durch den Anstand geboten erachtete, Beweise für seine Behauptungen beizubringen, sondern das — Ansinnen stellte, die Akademie solle diese oder

jene von Herrn Spitzer beliebte Klagen untersuchen oder untersuchen lassen — ob sie vielleicht begründet sind oder nicht.

Vielleicht aber tauchte auch die Erinnerung wieder auf, dass Herr Simon Spitzer genau in demselben Capitel über Differentialgleichungen vor 18 Jahren seinen Lehrer, den Herrn Professor Petzval, durch welchen er in dieser Theorie zuerst unterrichtet wurde, aus ganz besonderer Dankbarkeit ebenso des literarischen Diebstahls bezichtigte, wie dies jetzt von diesem würdigen Collegen mir geschehen ist.

Noch ein Wort über die Art, wie sich Herr Simon Spitzer, der Professor zweier Hochschulen, von meiner Aufforderung loszumachen suchte, eine in der „Presse“ aufgestellte Differentialgleichung „ausschliesslich in Form von Quadraturen nach zwei in den „Studien“ wirklich stehenden Formeln, die erweislich Herrn Simon Spitzer's „geistiges Eigenthum“ sind, zu integriren und die Lösungen in der „Presse“ zu veröffentlichen.“ Ob derselbe wohl begriffen hat, dass diese Frage eine nicht bloß sein Wissen und Können, sondern den Charakter seines Auftretens, ja noch viel mehr treffende Stichprobe war? Mit vollendeter Dreistigkeit schreibt er, „ich fände diese Aufgabe im §. 14 des ersten Abschnitts der „Studien“ ohnehin schon gelöst“. Nun möge der geehrte Leser wissen, dass im §. 14 gar keine Formel vorkommt, die eine Quadratur ist, und dass in jenem eine halbe Seite umfassenden Paragraphen gar nicht einmal eine Methode beschrieben ist, die auf eine Quadratur führen könnte! Darum hat Herr Spitzer „seine Lösung“ zu veröffentlichen unterlassen; er hat die Aufgabe, wie jeder Leser sich leicht überzeugen kann, nicht beantwortet, und konnte sie nicht beantworten, wie ich zum Voraus gewusst habe. Sapiienti sat! —

Wien, 26. Jänner 1875.

Dr. A. Winckler.

Ich habe auf dieses von Unwahrheiten strotzende Schreiben, aus welchem ich ersehen musste, dass Hr. Winkler absolut keine Ahnung von dem hat, was ich im §. 14 meiner „Studien“ ausführte, Folgendes geantwortet:

Herr Redacteur!

Ich hatte mir zwar vorgenommen, meine Affaire mit Herrn Professor Winckler, nachdem ich mein Recht geltend gemacht, nur mehr in Fachjournalen weiter zu verfolgen. Doch nöthigen mich einige Auslassungen in dem heutigen Briefe des Herrn Professors Winckler, nachfolgenden Brief vor die Oeffentlichkeit zu bringen und Sie, Herr Redacteur, um die Aufnahme desselben zu bitten.

Ich habe diesen Brief am 13. Jänner dem Herrn Professor einhändigen lassen, und erst nachdem ich acht Tage vergebens auf eine Antwort gewartet, meinen — bereits am 9. December 1875 — an das hohe Präsidium der Akademie der Wissenschaften gerichteten Brief am 21. Jänner d. J. in der „Presse“ veröffentlicht.

Der Brief an Herrn Professor Winckler lautet wörtlich:

„Herr Collega!

Sie haben mein, an das hohe Präsidium der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften gerichtetes Schreiben erhalten, mir ist bis heute keine Erledigung desselben zugegangen.

Sie werden es begreiflich finden, dass ich die bewusste Angelegenheit nicht in endlose Ferne hinausschieben lasse, und dass ich einer baldigen Lösung derselben entgegenstehe.

Wenn Sie einem wissenschaftlichen Gegenstande, so wie ich, ihre halbe Lebenszeit gewidmet haben, so werden Sie am besten sich in meine Lage hineindenken können und es begreiflich finden, dass ich die vor einer Reihe von Jahren erzielten Resultate meines Forschens nicht todtschweigen lasse, wenn heute ein neuer Forscher sich demselben Gegenstande zuwendet und gleiche oder nahezu gleiche Resultate findet.

Ich erlaube mir, Ihnen den Vorschlag zu machen, dass Sie in den Sitzungsberichten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Ihren Arbeiten einen Nachtrag folgen lassen, in welchem Sie meiner Arbeiten erwähnen, und daselbst anführen, dass eine

Reihe von Resultaten, zu denen Sie gelangten, sich auch in meinen Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen vorfinden.

Ich glaube, dass dieser mein Vorschlag Ihrerseits volle Billigung finden wird, was ich umsomehr wünsche, weil ich im entgegengesetzten Falle gezwungen wäre, so unersichtlich und peinlich es für mich wäre, Ihnen gegenüber als Collega an einer und derselben Hochschule, mein an die Akademie gerichtetes Schreiben der Oeffentlichkeit zu übergeben.

Einer baldigen Antwort entgegensehend

Ihr ganz ergebenster

Prof. Simon Spitzer.

Wien, am 13. Jänner 1876.

Wer dieses mein Schreiben liest, wird wohl mein Streben erkennen, was darin besteht, mein geistig Eigenthum zu schützen. Doch Hr. Dr. Winckler entgegnet hierauf wieder mit Verdrehungen und Entstellungen. Er schreibt:

Verehrliche Redaction!

Durch die in der heutigen Nummer der „Presse“ erfolgte Veröffentlichung eines Briefes vom 13. Jänner hat Herr Professor Simon Spitzer zum Ueberflus noch selbst den Beweis dafür erbracht, dass er mir mit einem Pressscandal gedroht hat, und es kaum erwarten konnte, denselben ins Werk zu setzen. Er ergänzt damit die Uebersicht des gegen mich befolgten Verfahrens.

Statt sich mit seinen vermeintlichen Beschwerden schon anfänglich an mich, oder doch an ein „Fachjournal“ zu wenden, hat Herr Simon Spitzer damit begonnen, mich bei einzelnen Professoren der Universität zu beschimpfen, hierauf bei dem Präsidium der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften wegen literarischen Diebstahls zu verklagen, dann weiter in geordnetem Klimax vor Professoren des polytechnischen Instituts und „Jedem, der es hören wollte“, mich mit Invectiven zu überschütten, dieses Verfahren vom 6. December bis 13. Jänner, also beinahe sechs Wochen lang fortzusetzen — und ich gestehe es, meine Geduld auf die Folter zu spannen. Nachdem diese respectablen Pressionsmittel ihre Wirkung versagt hatten, beehrte er mich am 13. Jänner durch einen mit „Herr Collega“ beginnenden und mit „ganz ergebenster Professor Simon Spitzer“ schliessenden Briefe, worin die Anklagen zwar etwas anders als in den an das Präsidium der Akademie früher (9. December) und später (20 Jänner) gerichteten Schreiben lauten, worin mir aber doch die Zumuthung gemacht wird, ich solle „nachträglich“ in den akademischen Schriften Dasjenige, was unzweifelhaft Anderen gehört, als Herrn Simon Spitzer's „geistiges Eigenthum“ erklären — wie bemerkt mit der Androhung, mich sonst in der Presse angreifen zu wollen.

Auch jeder Andere an meiner Stelle hätte, ich bin dessen gewiss, es unter seiner Würde gehalten, einen solchen Brief zu beantworten; — Herr Spitzer aber that ohne Verzug, was er nicht lassen konnte.

Wien, 28. Jänner 1876.

Dr. A. Winckler.

Im Jahre 1876 publicirte nun Hr. Winckler eine Broschüre über die Integration linearer Differentialgleichungen. Im Vorworte erzählt Hr. Winckler, dass er sich die Aufgabe gestellt, die beiden Gleichungen

$$(H_0 t + H) \frac{d^2 y}{dt^2} + 2(K_0 t + K) \frac{dy}{dt} + (L_0 t + L_0) y = 0 \quad (\text{I})$$

$$(H_0 t^2 + 2H_1 t + H_2) \frac{d^2 y}{dt^2} + (K_0 t + K_1) \frac{dy}{dt} + L_0 y = 0 \quad (\text{II})$$

und zwar letztere für den Fall, dass der Coefficient von $\frac{d^2 y}{dt^2}$ ein vollständiges Quadrat ist, sowie auch die Riccati'sche Differentialgleichung in voller All-

gemeinheit für alle reellen und complexen Werthe der constanten Coefficienten und der Veränderlichen t , sodann mit Ausschluss jeder andern Form blos durch einfache bestimmte Integrale zu integrieren.

Ich habe in meinen Studien dieselben Differentialgleichungen vor vielen Jahren vollständig integrirt und zwar gleichfalls mittelst bestimmten Integralen; ich habe aber gesucht in jenen Fällen, wo die bestimmten Integrale eine Integration zulassen, diese Integration wirklich durchzuführen, ich habe ferner gestrebt und strebe noch, wenn möglich, diese Gleichungen auf verschiedene Arten zu integrieren und habe auch gezeigt, dass in manchen Fällen die Differentialgleichungen auch mittelst zwei-, drei- und mehrfachen bestimmten Integralen integrirbar sind.

Hr. Winckler zeigt ferner, dass die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + at^n \frac{dy}{dt} + bt^{n-1} y = 0 \quad (\text{III})$$

für

$$at^n = (n+1)x$$

auf die Form

$$xy'' + \left(x + \frac{a}{n+1}\right)y' + \frac{b}{a(n+1)}y = 0 \quad (\text{IV})$$

übergeht (dies habe ich aber auch schon in meinen Studien gezeigt).

Hr. Dr. Winckler sagt nun weiter: „Nachdem ich vergeblich in allen mir zugänglichen Werken und Abhandlungen nach zwei particulären Integralen von (IV) in der Form blosser Quadraturen gesucht hatte, gerieth ich auch auf die 1860 erschienenen „Studien“ des Professors Simon Spitzer in Wien, fand aber darin nicht einmal für specielle Werthe von a , b , n das gesuchte allgemeine Integrale in Form von Quadraturen, wohl aber Seite 40 des I. Abschnittes die Versicherung „er habe die Gleichungen der (!) Form (I) in allen Fällen befriedigend integrirt“. Dass derselbe hieran selbst nicht glauben konnte, ergab sich mir, als ich später im LIII. Theile des Archivs von Grunert wieder von einer Abhandlung Spitzer's Kenntniss erhielt, welche betitelt ist: Integration der Gleichung $y'' = x(xy' - my)$ für den Fall wo m eine ganze positive Zahl ist. Obgleich derselbe eilf Jahre früher die ganz allgemeine Gleichung (I) in allen Fällen und in befriedigender Weise integrirt zu haben behauptete, so machte er doch jetzt nicht einmal den Versuch, jene specielle Gleichung, die er für $x^3 = \xi$ in

$$\xi \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{2-\xi}{3} \cdot \frac{dy}{d\xi} + \frac{m}{9} y = 0$$

transformirt und welche den Werthen $n=2$, $a=-1$, $b=m$ in der Gleichung (III) entspricht, anders als für ganze, positive Werthe von m zu integrieren — und wie integrieren? Etwa nach neuen eigenen Methoden, die 1860 noch nicht bekannt waren! Nein, sondern für die ganzen Zahlen $m=3, 6, 9, 12 \dots$ und $1, 4, 7, 10, 13 \dots$ mittelst höherer Differentialquotienten und Reihenentwicklung, sodann für $m=2$ nach einer drei Seiten langen Rechnung durch drei Doppelintegrale und zwar nach einer von Kummer angegebenen Methode,

— wieder mit der Versicherung: „auf ganz gleiche Weise lassen sich alle jene Gleichungen behandeln, wo m den Werth 5, 8, 11, 14 ... hat“.

Von Formeln für die letzteren Fälle aber findet sich ebensowenig eine Spur, als für jene, in welchen m etwa ein positiver Bruch wäre, nicht zu gedenken, dass Spitzer auch nur für den Fall, dass m eine ganze Zahl wäre, die particulären Integrale irgendwo in Form blosser Quadraturen anzugeben vermocht hätte.“

Meine Antwort auf diese Tiraden ist folgende:

Ich habe die Gleichungen der Form (I) in meinen Studien über Integration linearer Differentialgleichungen vollständig integrirt; wenn Hrn. Dr. Winckler's Fassungsgabe nicht ausreicht, um diese Arbeiten zu verstehen, so ist dies doch wohl nicht meine Schuld. Er möge nur nachstehende Männer fragen, deren Namen in der Wissenschaft anerkannt sind, diese werden ihm Bescheid geben:

Arent Benthem, Verfasser eines mit dem goldenen Preise gekrönten Werkes über Differentialgleichungen.

Dienger, emer. Professor der höheren Mathematik in Karlsruhe, von welchem eine Besprechung meiner Arbeiten in den Heidelberger Jahrbüchern der Literatur erschien.

Hofrath Dr. Josef Ph. Herr, in dessen vorzüglichem Lehrbuche der höheren Mathematik meine Arbeiten über die Integration linearer Differentialgleichungen Aufnahme fanden.

Dr. Eugen Lommel, der im XL. Bande von Grunert's Archiv Seite 110 zu der Differentialgleichung

$$xy'' + [\mu + \nu - (\alpha + \beta)x]y' + [-\alpha\nu - \beta\mu + \alpha\beta x]y = 0$$

kömmt und hiebei bemerkt: „Es ist dies die nämliche Gleichung, welche Hr. Spitzer in seinen trefflichen „Studien“ über die Integration linearer Differentialgleichungen so meisterhaft behandelt hat.“

Dr. Oscar Schlömilch, welcher im V. Bande seines mathematischen Journals bei Gelegenheit der Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, meine Arbeiten günstig bespricht.

Wenn Jemand, wie ich, jahrelange Vorlesungen über Integration linearer Differentialgleichungen hält, ist er wohl genöthigt in seinen Vorlesungen manchmal Beispiele durchzuführen, und wenn er ein passendes findet, so ist es gut, selbes mitzutheilen.

Ein solches schien mir nachstehendes zu sein:

$$y'' = x(xy' - my)$$

und ich habe darum dieses für ganze und positive Werthe von m integrirt.

Erfunden ist es wieder, wenn Hr. Dr. Winckler behauptet, dass für den Fall $m = 2$ die obige Gleichung nach einer von Kummer gegebenen Methode integrirt worden sei, sondern die von mir angewandte Methode zur Integration obiger Gleichung rührt von mir her und ich habe sie zuerst gelehrt.

Ich habe in meinen „Studien“ das Integrale der linearen Differentialgleichung

$$(m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)]y=0$$

in dem Falle, in welchem A und B positive, echte Brüche sind, oder in dem Falle, in welchem A und B imaginäre Zahlen bedeuten, ihre reellen Bestandtheile aber positive, echte Brüche sind, in folgender Form gegeben:

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du + \\ + C_2 (m+x)^{1-A-B} \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} du$$

Hr. Winckler behauptet, das zweite particuläre Integrale rühre von Weiler her, der dasselbe im LV. Bande von Crelle's Journal gegeben.

Ich habe die erwähnte Arbeit von Weiler, Seite 7 meiner Studien citirt, damit aber der Leser genau wisse, was Hr. Weiler fand, will ich Wort für Wort das mittheilen, was Hr. Weiler im LV. Bande von Crelle's Journal gegeben hat. Hr. Weiler sagt nämlich im April 1858:

Schon Euler hat gezeigt *), dass man der linearen Differentialgleichung

$$(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0 \quad (\text{I})$$

genüge durch die Form

$$y = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V du$$

wo V eine Function von u ist und die Integrationsgrenzen u_1 und u_2 von x unabhängig sind. Nimmt man abkürzend:

$$U_0 = a_2 u^2 + a_1 u + a_0$$

$$U_1 = b_2 u^2 + b_1 u + b_0$$

so findet man den Werth

$$V = \frac{1}{U_1} e^{\int \frac{U_0 du}{U_1}}$$

und die Integrationsgrenzen u_1 und u_2 sind die Wurzeln u der quadratischen Gleichung $U_1 = 0$. Um das allgemeine Integrale der linearen Differentialgleichung darzustellen, bedarf man zwei verschiedener besonderer Integrale. Man findet ein zweites in der Form

*) Dies ist nicht richtig; Laplace zeigte dies. Euler sucht umgekehrt jene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung auf, der Genüge geschieht durch

$$y = \int_0^a e^{ux} u^n (a-u)^v du$$

Uebrigens kann ich mich ja irren. Hr. Weiler citirte nur die Arbeit Euler's, wo diese Integrationsart gezeigt wird.

$$y = (a_2 + b_2 x)^n \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V du$$

denn setzt man

$$y = (a_2 + b_2 x)^n z$$

so geht die Differentialgleichung (I) über in:

$$(a_2 + b_2 x) z'' + (2n b_2 + a_1 + b_1 x) z' + (b_1 n + a_0 + b_0 x) z = 0 \quad (\text{II})$$

und zur Bestimmung des Exponenten n hat man die Gleichung

$$b_2^2 (n - 1) + a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

Die neue Differentialgleichung aber liefert, wie vorhin, eine andere Form:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V du$$

Für den Fall

$$b_2^2 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

hat man $n = 0$, und es ist einleuchtend, dass dann jene beiden besonderen Integrale identisch sind. Für diesen Fall hat Hr. Spitzer neulich im LIV. Bande dieses Journals Seite 280 ein zweites besonderes Integrale in der Form

$$y = \int_{u_1}^{u_2} l[U_1(a_2 + b_2 x)] e^{ux} V du$$

entwickelt, wo U_1 und V und die Integrationsgrenzen u_1 und u_2 mit den für die erste Form gegebenen Werthen übereinstimmen.“

Das ist das Ganze, was Hr. Weiler über diesen Gegenstand zu sagen hat.

Im selben Aufsatze sagt dann Weiler noch Folgendes:

Was nun die oben berührte Differentialgleichung

$$(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

angeht, so erhält man, wenn b_2 nicht gleich Null ist, durch einige Transformationen jedesmal die einfachere Gleichung

$$y z'' + (y - a - b) z' - a z = 0$$

und diese liefert die beiden besonderen Integrale:

$$z_1 = \int_0^\infty e^{-u} u^b (u - y)^a du \quad b + 1 > 0$$

$$z_2 = \int_y^\infty e^{-u} u^b (u - y)^a du \quad a + 1 > 0$$

welche in allen Fällen ihre Giltigkeit behalten.

Aber diese beiden Integrale gefallen Hrn. Weiler doch nicht recht, denn zwei Jahre später corrigirt er dieselben im XXXV. Bande von Grunert's Archiv. Weiler sagt nämlich Seite 446:

Zwei verschiedene Integrale der Differentialgleichung

$$y \frac{d^2 z}{dy^2} + (y - a - b) \frac{dz}{dy} - az = 0$$

sind in allen Fällen durch die beiden bestimmten Integrale

$$z = \int_0^\infty e^{-v} v^b (v - y)^a dv$$

und

$$z = \int_y^\infty e^{-v} v^b (v - y)^a dv$$

gegeben. Dieselben genügen der Differentialgleichung unmittelbar, wenn $b + 1 > 0$ und $a + 1 > 0$ ist. Wenn die Bedingung $b + 1 > 0$ nicht erfüllt ist, so hat man das erstere bestimmte Integrale zu ersetzen durch die Form:

$$z = \int_0^\infty \frac{d^n \{e^{-v} (v - y)^a\}}{dv^n} v^{b+n} dv$$

worin aber die Zahl n so gewählt werden muss, dass $b + n + 1 > 0$ ist. Wenn die Bedingung $a + 1 > 0$ nicht erfüllt ist, so verliert das zweite bestimmte Integrale in der vorstehenden Form seine Brauchbarkeit. Man wird dann

$$z = \int_y^\infty \frac{d^n \{e^{-v} v^b\}}{dv^n} (v - y)^{a+n} dv$$

schreiben, worin $a + n + 1 > 0$ gedacht wird.

Hieraus sieht man wohl zur Genüge, dass Hr. Weiler die erwähnten Differentialgleichungen nicht so integrirt, wie ich sie integrirte.

Später vergleicht wieder Hr. Dr. Winckler das von mir aufgestellte Integrale

$$y = C_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du +$$

$$+ C_2 (m + x)^{1-A-B} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{-B} (u - \beta)^{-A} du$$

mit dem von Petzval für positive Werthe von $m + x$ aufgestellten Integrale

$$y = C_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du +$$

$$+ C_2 \int_\alpha^{-\infty} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du$$

findet letzteres besser — offenbar nur aus dem Grunde, weil dies Hr. Dr. Winckler nicht versteht. Vielleicht wird Hr. Winckler aufgeklärt, wenn er den §. 33 dieser Vorlesungen liest.

In einer Note glossirt Hr. Dr. Winckler das von mir in dem speciellen Falle $A + B = 1$ gefundene logarithmische Integrale, welches ich mir von Dr. Borchard hätte zeigen lassen müssen.

Hrn. Dr. Winckler diene hierauf folgender Bescheid:

Als ich im Jahre 1857 im LIV. Bande von Crelle's Journal das Integrale

$$y = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V \log [(a_2 + b_2 x) (b_2 u^2 + b_1 u + b_0)] du$$

aufstellte, waren für die Differentialgleichung

$(m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]y = 0$
die beiden particulären Integrale

$$y_1 = \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du \quad A > 0, \quad B > 0$$

$$y_2 = (m+x)^{1-A-B} \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} du \quad A < 1, \quad B < 1$$

noch nicht bekannt (die Werke von Dr. Anton Winckler, aus denen ich hätte Belehrung schöpfen können, erschienen leider erst in den Jahren 1873 und 1875, also 16 respective 18 Jahre nachdem ich meine „Studien“ publicirte), ich konnte daher nicht aus obigen Gleichungen durch Specialisirung von $A + B = 1$ die logarithmischen Integrale finden, später fand ich aus diesen Integralen die logarithmische Form, ich theilte sie Hr. Dr. Borchard mit, der mir darauf einen einfacheren Beweis, als ich gab, mittheilte, den ich daher in meinen „Studien“ mit Quellenangabe, wie ich es gewöhnlich zu thun pflege und wie es allgemein Brauch in der wissenschaftlichen Welt ist, veröffentlichte. Hr. Dr. Winckler gibt sich mit einer solchen Kleinigkeit, wie der Angabe der Quellen nicht ab; er plündert meine Arbeiten, verschweigt wohlweislich die Quelle, aus der er geschöpft, er schmückt sich mit fremden Federn, weil es ihm an eigenen mangelt. Uebrigens bin ich stets stolz darauf, dass Männer von dem Rufe eines Borchard sich mit meinen Arbeiten beschäftigen, Herrn Dr. Winckler's Arbeiten haben diesem Manne nie zu einer Bemerkung Anlass gegeben.

Später sagt Hr. Dr. Winckler wieder:

„Liegen die reellen Theile von A und B nicht zwischen 0 und 1, so „sucht man in den „Studien“ (§. 1 bis §. 24) vergebens nach zwei verschiedenen particulären Integralen in Form blosser Quadraturen, und eben so „wenig in dem Fall, wenn A und B über 1 oder unter Null liegen oder wenn „diese entgegengesetzte Zeichen haben.“

Das ist wieder ganz erfunden, und ich kann mir die Widerlegung dieser erfundenen Behauptung wohl ersparen.

Hr. Dr. Winckler lässt sich auch zu Zahlenbeispielen herbei. Sehen wir uns einmal diese näher an. Die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (t + 6) \frac{dy}{dt} + (2t + 2) y = 0$$

ist es, welche Hr. Dr. Winckler integrirt. Er setzt

$$t = x - 2$$

und findet dann

$$y_1 = e^{-2x - \frac{1}{2}x^2} \int_0^\infty e^{-x^2 u} u^{\frac{5}{2}} (2u + 1)^{-4} du$$

$$y_2 = x e^{-2x - \frac{1}{2}x^2} \int_0^\infty e^{-x^2 u} u^3 (2u + 1)^{-\frac{1}{2}} du$$

Behandelt man nun dieselbe Gleichung, nämlich

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (x + 4) \frac{dy}{dx} + (2x - 2) y = 0$$

nach den von mir aufgestellten Methoden, so findet man, da dieselbe ein specieller Fall der im dritten Capitel dieses Buches behandelten Gleichung

$$n y'' + (m + x - n\alpha) y' + [A - \alpha(m + x)] y = 0$$

ist, und aus ihr hervorgeht, wenn man

$$m = 2, \quad n = 1, \quad \alpha = -2, \quad A = -6$$

setzt, Folgendes:

Ich setze nach §. 42

$$y = e^{-2x} z$$

und erhalte

$$z'' + x z' - 6z = 0$$

sodann setze ich

$$x = \xi \sqrt{-1}$$

dadurch komme ich zu der Gleichung:

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} - 6z$$

ihr Integrale ist nach Formel (107):

$$z = C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2 \xi^2}{2!} - \frac{u^3 \xi^3}{3!} - \frac{u^4 \xi^4}{4!} - \frac{u^5 \xi^5}{5!} - \frac{u^6 \xi^6}{6!}}{u^7} - \frac{\xi^5}{5!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\xi^3}{3!} - \frac{1}{3 \cdot 5} \xi \right] du + C_2 \left[\frac{\xi^6}{6!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi^4}{4!} + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\xi^2}{2!} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right]$$

Das zweite particuläre Integrale lässt sich nun, wenn man für ξ und für z ihre Werthe setzt, so schreiben:

$$y = e^{-2x} (x^6 + 15x^4 + 45x^2 + 15)$$

Dieses Integral ist denn doch von ganz anderer Form, als das von Hrn. Dr. Winckler hingestellte.

Man kann die Gleichung

$$y'' + (x + 4) y' + (2x - 2) y = 0$$

auch auf andere, im §. 58 gezeigte Art integrieren. Das Integrale dieser Gleichung ist nämlich

$$y = e^{-\frac{(m+x)^2}{2n}} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}} \left[e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \right]$$

oder, wenn man statt m , A , n und α ihre Werthe setzt, so erhält man

$$y = e^{-\frac{(2+x)^2}{2}} \frac{d^6}{dx^6} \left(e^{\frac{x^2}{2}} \right)$$

Behandelt man die vorgelegte Gleichung nach Petzval's Methode, so erhält man nach der Formel (136)

$$y = \left\{ \frac{d^6}{du^6} \left[e^{u(2+x) + \frac{u^2}{2}} \right] \right\}_{u=-2}$$

Schliesslich kann man die vorgelegte Gleichung nach der im §. 61 gegebenen Methode integrieren. Nach dieser Methode hat man:

$$y = e^{-2x} z$$

zu setzen, man erhält dadurch

$$z'' + xz' - 6z = 0$$

Nun setze man

$$x^2 = \xi$$

man kommt dadurch zu der Gleichung

$$2\xi \frac{d^2 z}{d\xi^2} + (1 + \xi) \frac{dz}{d\xi} - 3z = 0$$

welche ein Specialfall der Gleichung (14) ist; man hat nämlich

$$m = 0, \quad A = -3, \quad B = \frac{7}{2}, \quad \alpha = 0, \quad \beta = -\frac{1}{2}$$

und folglich ist nach Formel (61)

$$z = \sqrt{\xi} \cdot e^{-\frac{\xi}{2}} \cdot \frac{d^3}{d\xi^3} \left[\xi^{\frac{5}{2}} e^{\frac{\xi}{2}} \right]$$

ein Integrale der Gleichung. Bei all den Methoden, die ich hier angab, kommt man, stets die gefundenen Ausdrücke entwickelnd, zu dem oben aufgestellten Werthe von y , d. i. zu

$$y = e^{-2x} (x^6 + 15x^4 + 45x^2 + 15)$$

Hr. Dr. Winckler stellt sich weiter die Aufgabe, die Gleichung

$$12xy'' + (7 - 12x)y' + 800y = 0$$

aufzulösen, und gibt hiefür folgende particuläre Integrale an:

$$y_1 = \int_0^\infty e^{-(1+\sqrt{-1})ux} u^{\frac{265}{4}} \left(\frac{1}{1+\sqrt{-1}} - u \right)^{-\frac{203}{3}} du$$

$$y_2 = x^{\frac{5}{12}} \int_0^\infty e^{-(1+\sqrt{-1})ux} u^{\frac{200}{3}} \left(\frac{1}{1+\sqrt{-1}} - u \right)^{-\frac{269}{4}} du$$

Setzt man in dieselben

$$u = \frac{v}{1+\sqrt{-1}}$$

so gehen sie über in

$$y_1 = \int_0^{(1+\sqrt{-1})\infty} e^{-vx} v^{\frac{265}{4}} (1-v)^{-\frac{203}{3}} dv$$

$$y_2 = x^{\frac{5}{12}} \int_0^{(1+\sqrt{-1})\infty} e^{-vx} v^{\frac{200}{3}} (1-v)^{-\frac{269}{4}} dv$$

Von diesen Integralen, welche unter andern merkwürdigen Eigenschaften vornehmlich die haben, der vorgelegten Gleichung nicht zu genügen, behauptet Hr. Dr. Winckler, dass sie endliche, allen Anforderungen streng genügende particuläre Integrale der obigen Differentialgleichungen sind, aus welchen man durch Trennung des Reellen vom Imaginären im Ganzen sogar vier Lösungen erhält.

Woher weiss Hr. Dr. Winckler, dass diese Integrale endliche Werthe haben? Und woher weiss Hr. Dr. Winckler, dass sie der vorgelegten Gleichung genügen? Mir kommen diese beiden Integrale vor, als wären sie mathematische Missgeburten, und ich glaube es wäre am besten, Hr. Dr. Winckler würde selbe in einer Schaubude, wo vielleicht auch Enten mit vier Füßen zu sehen sind, ausstellen.

Wenn ich die Gleichung

$$12x y'' + (7 - 12x) y' + 800y = 0 \quad (\text{I})$$

nach meiner Methode lösen wollte, so hätte ich in der Gleichung (14) dieser Vorlesungen zu setzen:

$$m = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad A = -\frac{200}{3}, \quad B = \frac{269}{4}$$

§. 14 meiner „Studien“ (oder §. 20 dieser Vorlesungen) lehrt, dass man, um die Gleichung (I) zu integrieren, die Gleichung

$$12x Y'' - (809 + 12x) Y' + 800 Y = 0 \quad (\text{II})$$

aufstellen müsse, für welche

$$m = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad A = -\frac{200}{3}, \quad B = -\frac{3}{4}$$

ist. Nun findet zwischen den beiden Gleichungen (I) und (II) folgende Beziehung statt:

$$y = e^x \frac{d^{68}}{dx^{68}} (e^{-x} Y) \quad (\text{III})$$

wenn ich daher weiss, was Y für eine Function von x ist, so weiss ich auch, auf welche Weise y von x abhängt.

Bevor ich weiter gehe, will ich das mittheilen, was Hr. Dr. Winckler dazu bemerkt:

„Nun frage ich, wer in der Welt — Spitzer nicht ausgenommen — werde je im Ernste daran denken, y nach dieser Formel wirklich berechnen zu wollen, und wem könnte Herr Spitzer plausibel machen, diese Formel (auf die er übrigens, nebenbei bemerkt, ebenfalls nicht den leisesten Anspruch hat)

stelle y durch 2 Quadraturen dar, oder sei etwa gar dasselbe, was ich vorhin durch die Berechnung der beiden particulären Integrale y_1 und y_2 aus meinen Formeln abgeleitet habe?“

Ich entgegne hierauf Hrn. Dr. Winckler Folgendes:

Wenn Hr. Dr. Winckler wirklich die Absicht hat, die Gleichung (I) zu integrieren, so darf er durchaus die Mühe nicht scheuen, die in (III) angezeigte Operation zu vollführen, sie ist nicht im geringsten complicirter, als die Erhebung eines Binoms zur 68. Potenz. Die in den Klammern stehende Bemerkung, „auf die er übrigens, nebenbei bemerkt, ebenfalls nicht den leisesten Anspruch hat“, ist nichts als eine Unwahrheit, die einzige Waffe, die Hr. Dr. Winckler meisterhaft zu führen versteht. Wer hat denn, Hr. Dr. Winckler, auf diese Formel Anspruch?

Die Gleichung

$$12x Y'' - (809 + 12x) Y' + 800 Y = 0 \quad (\text{II})$$

in welcher beide Argumente A und B negativ sind, lehrte ich im §. 13 meiner „Studien“ (im §. 19 dieser Vorlesungen) integrieren.

Ich setze nämlich

$$Y = x^{\frac{821}{12}} Z \quad (\text{IV})$$

dadurch komme ich zu der Gleichung

$$12x Z'' + (833 - 12x) Z' - 21 Z = 0 \quad (\text{V})$$

in welcher

$$m = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad A = \frac{7}{4} \quad B = \frac{203}{3}$$

ist. Um die Gleichung (V) zu integrieren, schreibe ich die Gleichung

$$12x Z_1'' + (17 - 12x) Z_1' - 9 Z_1 = 0 \quad (\text{VI})$$

auf, für welche

$$m = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad A = \frac{3}{4} \quad B = \frac{2}{3}$$

ist. Die beiden Gleichungen (V) und (VI) hängen zusammen mittelst der Gleichung

$$Z = e^x \frac{d^{67}}{dx^{67}} (e^{-x} Z_1')$$

und die Gleichung (VI) hat folgendes Integrale:

$$Z_1 = C_1 \int_0^1 e^{ux} u^{-\frac{1}{4}} (1-u)^{-\frac{1}{3}} du + C_2 x^{-\frac{5}{12}} \int_0^1 e^{ux} u^{-\frac{2}{3}} (1-u)^{-\frac{3}{4}} du$$

Nach der von mir gelehrtten Methode müsste man daher, wollte man das von Hrn. Winckler so ungemein ungeschickt gewählte Beispiel auflösen, zuerst

$$y = e^x \frac{d^{68}}{dx^{68}} (e^{-x} Y)$$

setzen, dann

$$Y = x^{\frac{821}{12}} Z$$

und endlich

$$Z = e^x \frac{d^{67}}{dx^{67}} (e^{-x} Z_1')$$

woselbst

$$Z_1 = C_1 \int_0^1 e^{ux} u^{-\frac{1}{3}} (1-u)^{-\frac{1}{3}} du + C_2 x^{-\frac{5}{2}} \int_0^1 e^{ux} u^{-\frac{2}{3}} (1-u)^{-\frac{1}{3}} du$$

ist. Das von mir aufgestellte Integrale hat einen Sinn, lässt sich auch leicht in unendliche convergente Reihen entwickeln, die von Hrn. Dr. Winckler aufgestellten Integrale sind sinnlose Formeln, die der vorgelegten Gleichung nicht einmal genügen.

Seite 22 bespricht Hr. Dr. Winckler die Gleichung

$$n y'' + (m + x - n \alpha) y' + [A - \alpha (m + x)] y = 0$$

von welcher ich, im Falle A eine positive Zahl bezeichnet, das Integrale mittelst der Laplace'schen Methode aufstellte. Hier weist Hr. Dr. Winckler nach, dass Petzval dieselben Formeln gegeben. Das ist richtig, denn Petzval adoptirte ja die Laplace'sche Methode. Uebrigens habe ich in meinen „Studien“ Petzval's Werk oft citirt, kein ehrlicher Mensch hat mir bisher noch einen literarischen Diebstahl nachgewiesen.

Hr. Dr. Winckler kömmt dann zur Besprechung der Gleichung

$$a_2 y'' + a_1 y' + (a_0 + x) y = 0$$

welche ich wieder nach Laplace's Methode integrierte, und von welcher Hr. Dr. Winckler wieder findet, dass andere vor mir, nämlich Petzval, Scherk, Jacoby dasselbe gethan. Ich habe diese Männer auch alle in meinen „Studien“ genannt. Der Vorwurf Hrn. Dr. Winckler's ist daher vollkommen unmotivirt, und dies um so mehr, als ich nie in meinem Leben behauptet habe, dass die Laplace'sche Methode von Jemand andern als von Laplace herrührt.

Ich integrierte dann die Gleichung

$$a_2 y'' + a_1 y' + (a_0 + x) y = 0$$

auch auf andere Weise. Ich setzte zuerst in diese Gleichung

$$y = e^{-\frac{a_1 x}{2 a_2}} z$$

sodann setzte ich

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 + x = \xi^{\frac{2}{3}}$$

woselbst $\lambda = -\frac{a_1}{2 a_2}$ bedeutet, und kam dadurch zu der Gleichung

$$9 a_2 \xi \frac{d^2 z}{d \xi^2} + 3 a_2 \frac{d z}{d \xi} + 4 \xi z = 0$$

(siehe Seite 90 dieses Buches) und diese integrierte ich mittelst der Formel:

$$z = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+\xi)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du + \\ + C_2 (m + \xi)^{1-A-B} \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+\xi)} (u - \alpha)^{-B} (u - \beta)^{-A} du$$

indem ich in dieselbe

$$m = 0, \quad A = B = \frac{1}{6}, \quad \alpha = -\beta = -\frac{2}{3\sqrt{-a_2}}$$

setzte. Ich fand so:

$$z = C_1 \int_{-\frac{2}{3\sqrt{-a_2}}}^{+\frac{2}{3\sqrt{-a_2}}} e^{u\xi} \left(u^2 + \frac{4}{9a_2}\right)^{-\frac{5}{6}} du + C_2 \xi^{\frac{2}{3}} \int_{-\frac{2}{3\sqrt{-a_2}}}^{+\frac{2}{3\sqrt{-a_2}}} e^{u\xi} \left(u^2 + \frac{4}{9a_2}\right)^{-\frac{1}{6}} du$$

Hier behauptet wieder Hr. Dr. Winckler, dass meine eigene geistige Arbeit gleich Null sei, indem Petzval die viel allgemeinere Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k x^n y = 0$$

durch Substitution von

$$t = x^{\frac{n+2}{2}}$$

in die Form bringt:

$$t \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{n}{n+2} \frac{dy}{dt} + \frac{4k}{(n+2)^2} t y = 0$$

Diese Gleichung wird nun freilich von Petzval nicht durch die oben von mir gezeigte Weise integrirt, das beirrt aber Hrn. Dr. Winckler nicht im Geringsten. Hr. Dr. Winckler citirt dann eine im XVII. Bande von Crelle's Journal stehende Arbeit von Lobatto, welcher daselbst die Riccati'sche Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + c^2 x^n y = 0$$

mittelst bestimmten Integralen integrirte. Aus dieser vorzüglichen Arbeit sieht man, dass für den Specialfall $n = 1$ das Integrale der Riccati'schen Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + c^2 x y = 0$$

in der Form:

$$y = C_1 \int_{-c}^{+c} e^{\frac{2}{3} u x \sqrt{x}} (c^2 - u^2)^{-\frac{5}{6}} du + C_2 x \int_{-c}^{+c} e^{\frac{2}{3} u x \sqrt{x}} (c^2 - u^2)^{-\frac{1}{6}} du$$

auftritt. Kummer hat schon im XII. Bande von Crelle's Journal die Riccati'sche Gleichung mittelst bestimmter Integralen integrirt, aus seiner daselbst Seite 147 aufgestellten Formeln würde man leicht dasselbe finden.

Ich halte trotzdem meine Methode für neu, denn die Gleichung

$$a_2 y'' + a_1 y' + (a_0 + x) y = 0$$

welche ich durch zwei aufeinander folgende Substitutionen in die Form

$$9 a_2 \xi \frac{d^2 z}{d\xi^2} + 3 a_2 \frac{dz}{d\xi} + 4 \xi z = 0$$

brachte, und als Specialfall der Gleichung:

$$(m+x) y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)] y' + [-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)] y = 0$$

behandelte, wurde bisher weder von Petzval noch von Weiler noch von irgend Jemanden andern vor mir auf die Weise behandelt, wie ich sie behandelt hatte. Euler erklärte gerade heraus, dass er die sehr einfache Gleichung

$$y'' = xy$$

nicht integrieren könne.

Schauen wir nun, wie die vom Hrn. Dr. Winckler für die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2k \frac{dy}{dx} + (l_0 x + k^2) y = 0$$

aufgestellten particulären Integrale aussehen. Hr. Dr. Winckler gibt an:

$$y_1 = e^{-kx - \frac{2}{3}x\sqrt{-l_0}} \int_0^\infty e^{(\sigma + \tau\sqrt{-1})ux\sqrt{x}} \left[u \left(\frac{\frac{4}{3}\sqrt{-l_0}}{\sigma + \tau\sqrt{-1}} - u \right) \right]^{-\frac{5}{6}} du$$

$$y_2 = x e^{-kx - \frac{2}{3}x\sqrt{-l_0}} \int_0^\infty e^{(\sigma + \tau\sqrt{-1})ux\sqrt{x}} \left[u \left(\frac{\frac{4}{3}\sqrt{-l_0}}{\sigma + \tau\sqrt{-1}} - u \right) \right]^{-\frac{1}{6}} du$$

und von diesen Formeln behauptet Hr. Dr. Winckler, dass sie von endlichem Werthe sind, und dass sie sowohl hinsichtlich des Ausdruckes unter dem Zeichen als der Grenzen von den von mir aufgestellten Lösungen total verschieden und wesentlich neu sind.

Ich frage nun, ist das nicht offener Schwindel?

Führt man in den Winckler'schen Integralen für u eine neue Variable v ein, mittelst der Substitution

$$u = \frac{v}{\sigma + \tau\sqrt{-1}}$$

so erhält man

$$y_1 = e^{-kx - \frac{2}{3}x\sqrt{-l_0}} \int_0^{\infty(\sigma + \tau\sqrt{-1})} e^{v x \sqrt{x}} \left[v \left(\frac{4}{3}\sqrt{-l_0} - v \right) \right]^{-\frac{5}{6}} dv$$

$$y_2 = x e^{-kx - \frac{2}{3}x\sqrt{-l_0}} \int_0^{\infty(\sigma + \tau\sqrt{-1})} e^{v x \sqrt{x}} \left[v \left(\frac{4}{3}\sqrt{-l_0} - v \right) \right]^{-\frac{1}{6}} dv$$

d. i. ein Ausdruck, der sich von dem von mir gegebenen bloß in den Grenzen unterscheidet; denn die von mir aufgestellten particulären Integrale gehen, wenn man in dieselben für u eine neue Variable v mittelst der Substitution

$$u = -\frac{2}{3\sqrt{-a_2}} + v$$

einführt, in dieselben Integrale über, welche Hr. Dr. Winckler aufstellt, mit dem einzigen Unterschiede, dass meine Integrale die Grenzen 0 und $\frac{4}{3\sqrt{-a_2}}$

die Winckler'schen Integrale aber die Grenzen 0 und $\infty(\sigma + \tau\sqrt{-1})$ haben. Meine Integrale haben endlichen Werth, lassen sich auch leicht in convergente Reihen entwickeln; das sind Eigenthümlichkeiten, die ihnen einen un-

zweifelhaften Werth verleihen, die von Hrn. Dr. Winckler aufgestellten Integrale gestatten keine Entwicklung in convergente Reihen, wenigstens wurde dies von Niemanden noch gezeigt.

Auf gleiche Weise lassen sich fast alle von Hrn. Dr. Winckler aufgestellten Integrale aus den von mir gegebenen ableiten. Die von Herrn Dr. Winckler mit so viel Unverstand eingeführten imaginären Zahlen verschwinden durch Einführung einer neuen Variablen ganz aus den Ausdrücken unter dem Integralzeichen, und stellen sich bloß in den unendlichen Grenzen wieder ein. Nun weiss man ja, dass der Gleichung

$$(u - \alpha)^A (u - \beta)^B e^{u(m+x)} = 0$$

welche zur Bestimmung der Grenzen dient (siehe Seite 5 meiner „Studien“, oder Seite 5 dieses Werkes) genügt wird durch

$$u(m+x) = -\infty$$

also wenn $m+x$ positiv ist, durch $u = -\infty$

„ $m+x$ negativ „ „ $u = +\infty$

Man kann auch, wie Petzval in seinem so oft genannten Werke Seite 44 des I. Bandes zeigte, die Integrationsgrenzen

$$\pm \infty (\lambda \pm \mu \sqrt{-1})$$

setzen, nur wären dann die Zeichen so zu wählen, dass der reelle Theil der imaginären Grenzen im ersten Falle negativ, im zweiten Falle positiv ausfällt.

Hr. Dr. Winckler bespricht dann die Gleichung:

$$x^2 y'' + [c + (a + b + 1)x] y' + aby = 0$$

Zu dieser Gleichung macht Hr. Dr. Winckler die Bemerkung:

„Wenn nun Spitzer bezüglich dieser Gleichung sich auf den dritten Abschnitt seiner „Studien“ beruft, so ist zu bemerken, dass Alles, was er über dieselbe zu sagen weiss, kaum eine Seite jenes Abschnittes füllt.“

Ich bemerke darauf, dass dies auch vollständig genügt, und dass Hr. Dr. Winckler selber alles das that, was ich auf dieser einen Seite angab.

Hr. Dr. Winckler hat am 12. April 1877 die kaiserliche Akademie der Wissenschaften wieder mit einer Arbeit über Integration linearer Differentialgleichungen beglückt. Bei dieser Arbeit zeigt es sich, dass die Lection, welche ich mir Hrn. Dr. Winckler zu ertheilen erlaubt habe, wenigstens etwas gefruchtet hat; nun bequemt er sich denn doch bereits dazu, jene Männer zu nennen, die sich mit dem gleichen Gegenstande beschäftigt, und Beachtenswerthes in demselben geleistet haben; meine Arbeiten allein nennt er nicht, sondern diese plündert er einfach. Er integrirt daselbst (LXXV. Band, zweite Abtheilung der Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Seite 586) die Gleichung

$$y'' + 2ky' + (l_0 x + k^2)y = 0$$

findet die von mir in meinen „Studien“ aufgestellten Integrale, schreibt sie aber diesmal nicht mehr Petzval zu, wie in seinem früheren Opus, (siehe den LXVII. Band der Sitzungsberichte, Seite 153), sondern Jacoby und Lobatto. Jacoby's im X. Band von Crelle's Journal befindliche Arbeit stellt das Integrale dar der Differentialgleichung

$$y^{(n)} = (\alpha + \beta x) y$$

und dieses ist:

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}} \left[C e^{tx} + C_1 \varrho e^{\varrho tx} + C_2 \varrho^2 e^{\varrho^2 tx} + \dots + C_n \varrho^n e^{\varrho^n tx} \right] dt$$

und dieses hat nicht die entfernteste Aehnlichkeit mit den in meinen „Studien“ Seite 40 mit (68) bezeichneten Integralen, oder was dasselbe ist, mit den in dieser Schrift Seite 91 aufgestellten Integralen.

Aber so ist es immer, wenn man die Unwahrheit spricht. Einmal sagt Hr. Winckler, dass die beiden von mir gegebenen particulären Integrale zuerst von Petzval, aber auf anderem Wege und in anderer Form gefunden wurden, dann schreibt er sie Jacoby zu und schliesslich Lobatto.

Seite 592 betrachtet Hr. Anton Winckler die Gleichung

$$y'' + 2(k_0 x + k)y' + (2k_0 k x + k^2)y = 0$$

Es ist diese Gleichung ein specieller Fall der von mir vollständig integrierten Gleichung

$$n y'' + (m + x - n\alpha) y' + [A - \alpha(m + x)] y = 0$$

man braucht nur in dieser zu setzen

$$m = \frac{k}{2k_0}, \quad n = \frac{1}{2k_0}, \quad A = 0, \quad \alpha = -k$$

In meinen „Studien“ findet man als Integrale

$$y = e^{-\frac{(m+x)^2}{2n}} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}} \left[e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \right]$$

(siehe Seite 37 meiner „Studien“, oder Seite 80 dieser Schrift), folglich ergibt sich aus denselben mit einem Schlage

$$y = e^{-kx}$$

ein Resultat, welches Hr. Dr. Winckler mühsam entwickelt.

Seite 593 integrirt Hr. Dr. Winckler die Gleichung

$$y'' + 2(k_0 x + k)y' + (2k_0 k x + 2k_0 + k^2)y = 0$$

Selbe ist wieder ein Specialfall der Gleichung

$$n y'' + (m + x - n\alpha) y' + [A - \alpha(m + x)] y = 0$$

setzt man nämlich hierin

$$m = \frac{k}{2k_0}, \quad n = \frac{1}{2k_0}, \quad A = 1, \quad \alpha = -k$$

so erhält man die von Hrn. Dr. Winckler aufgestellte Gleichung. Ihr Integrale ist nach der von mir aufgestellten Formel

$$y = e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[e^{-\frac{m+n\alpha}{n} \cdot x - \frac{x^2}{2n}} \right]$$

oder entwickelt

$$y = e^{-kx - k_0 x^2}$$

was auch Hr. Dr. Winckler nach mühsamem Forschen findet.

Ich komme nun bezüglich Hrn. Dr. Winckler's zum Schlusse. Die Anklage, welche ich gegen ihn erhoben, halte ich vollständig aufrecht.

Hr. Dr. Winckler hat in seinen erwähnten Arbeiten die Resultate meiner „Studien“, die ich in den Jahren 1860 und 1861 publicirte, in einer etwas abgeänderten aber missglückten Form in den Druckschriften der kais. Akademie der Wissenschaften wiedergegeben, ohne denselben auch nur das geringste nennenswerthe Neue zuzufügen. Nachdem ich mein Prioritätsrecht wahrte, suchte Hr. Dr. Winckler durch Verläumdungen und Verdrehungen den Werth meiner Arbeiten herabzusetzen, und als ich ihn des Plagiats beinichtigte, wendete er einen alten Kunstgriff an, drehte den Spiess um, und stellte mich als Plagiator hin. Ob ihm sein Kniff gelungen, wird die Folge lehren. Fünf Jahre ist die erste Arbeit des Hrn. Dr. Winckler alt, in allen Welttheilen sind die Druckschriften der kais. Akademie verbreitet, und noch hat kein Gelehrter von der Arbeit des Hrn. Dr. Winckler Notiz genommen, denn sie verdient auch in der That nicht die geringste Beachtung.

Ich habe in meinem an die kais. Akademie der Wissenschaften unterm 9. December 1875 gerichteten Schreiben gebeten, dass dieselbe das Geeignete zur Constatirung meiner Angaben veranlasse, denn ich glaubte, dass die kais. Akademie der Wissenschaften geistiges Eigenthum schütze. Ich habe mich hierin leider geirrt. So wende ich mich denn an meine Fachgenossen, und vornehmlich an jene der österr. Hochschulen, ihrem Urtheile sehe ich mit Ruhe entgegen, denn die wahren Männer der Wissenschaft haben nicht nur einen regen Sinn für Recht und Gerechtigkeit, sondern sie sind es, welche den Begriff des geistigen Eigenthums auf das Entschiedenste und Energischste zu wahren wissen, und selbständige Forschung von dem Plagiat scharf zu sondern verstehen. Ihrem Urtheile vertraue ich meine Sache getrost an, und ich wünsche nichts sehnlicher, als dass Hr. Prof. Dr. Anton Winckler zur Herstellung seiner Ehre baldigst das Urtheil der Fachgenossen über diesen Gegenstand provociren möge.

Da Hr. Dr. Winckler wiederholt mein Zerwürfniss mit Petzval in seiner gewohnten, verdrehenden Weise zur Sprache bringt, sehe ich mich genöthigt, auch diese Angelegenheit klarzustellen. Ich thue dies mit Ruhe und Unbefangenheit, denn mehr als zwanzig Jahre sind seit der Zeit des Zerwürfnisses zwischen Petzval und mir verflossen; und das, was ich damals anstrebte, habe ich lange erreicht.

In den Jahren 1849 bis 1854 war ich Assistent an dem polytechnischen Institute in Wien, und strebte dann eine a. o. Professur an dem Polytechnicum an. Meine Ansprüche bestanden in einem Jahresgehälter von fl. 600. Hätte ich dies erlangt, so hätte ich mich damals glücklich gefühlt, und hätte ganz der Wissenschaft leben können. Allein, der damalige Cultus- und Unterrichts-Minister, Graf Leo Thun, konnte sich nicht entschliessen, zu einer, wie er sich ausdrückte, so bedeutenden Belastung des Staatsschatzes.

Unaufgefordert nahmen zwei hochangesehene Männer, die Herren Moritz Ritter von Goldschmidt und Leopold Edler von Wertheimstein meine Angelegenheit in ihre Hände, und reichten für mich ein Majestätsgesuch ein,

Se. Majestät signirte dasselbe allergnädigst, doch leider war dies ohne allen Erfolg. Der Minister Graf Leo Thun liess mich rufen, und als ich kam, sagte er mir, dass er erstaunt sei, dass ich eine Professur für höhere Mathematik anstrebe, da ich doch kein Mathematiker, sondern ein blosser Rechner sei. Ich berief mich auf das Zeugniß von der Direction des polytechnischen Institutes *), auf das Anerkennungsschreiben, welches mir die kais. Akademie der Wissenschaften zugesandt hatte, nachdem ich derselben meine Arbeiten über die allgemeine Auflösung der numerischen Gleichungen überreicht hatte, ferner auf meine jüngst publicirten Arbeiten über die Kriterien des Grössten und Kleinsten bei den Problemen der Variationsrechnung etc., es nützte alles nichts, Se. Excellenz behauptete, das Zeugniß des polytechnischen Institutes sei ganz werthlos, ebenso das Anerkennungsschreiben, das ich von der kais. Akademie der Wissenschaften erhielt, da dasselbe vom Regierungsrathe Andreas von Ettingshausen herrühre, der wohl Physiker, aber nicht Mathematiker sei, die in der kais. Akademie der Wissenschaften von mir publicirten Arbeiten seien auch ohne allen Werth.

Darauf konnte ich selbstverständlich Sr. Excellenz nichts entgegnen.

Da die Bemerkung, dass Ettingshausen Physiker, aber nicht Mathematiker sei, mir bereits einige Tage, bevor ich zum Grafen Leo Thun gerufen wurde, von Petzval in einem Privatgespräche gemacht wurde, so war ich im Reinen, und wusste gleich aus welcher Richtung der Wind wehe. Ich vermied naturgemäss von diesem Moment an den Umgang mit Petzval, den ich bisher so ungemein hoch geachtet und verehrt hatte.

Mein Streben war nun, dem Herrn Minister zu beweisen, dass ich doch wenigstens kein gewöhnlicher Rechner sei. Ich verfasste eine Abhandlung über

Zeugniß.

Herr Simon Spitzer hat seine Dienstzeit am k. k. polytechnischen Institute am 1. October 1849 als Assistent für die Lehrkanzel der Elementar- und höheren Mathematik begonnen, und supplirte in den letzten vier Monaten des Studienjahres 1850, so wie in den letzten 6 Monaten des Jahres 1852 die Lehrkanzel der höheren Mathematik, jene der Elementar-Mathematik aber während des ganzen Studienjahres 1853 zur vollkommenen Zufriedenheit der Direction.

Herr Spitzer besitzt ein ausgezeichnetes Talent für Mathematik, und hat dasselbe auch bestens angewendet. Dieses beweisen nicht nur seine gediegenen Kenntnisse, sondern auch seine literarischen Arbeiten, welche von der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften die wohlverdiente Anerkennung gefunden haben. Er besitzt ferner die seltene Eigenschaft, durch Deutlichkeit und Bestimmtheit im Vortrage, den Schülern die oft schwierigen Lehren leicht zugänglich zu machen, und in ihnen eine besondere Vorliebe für diese Wissenschaft zu erwecken, daher auch der Erfolg seines Unterrichtes immer ausgezeichnet war. Sein Betragen gegen die Schüler ist liebevoll und Vertrauen erweckend.

Diese ausgezeichneten Eigenschaften begründen die Ueberzeugung der Direction, dass Herr Simon Spitzer sich in jeder ihm anvertrauten Lehrstelle für reine Mathematik die vollkommenste Zufriedenheit erwerben wird. Sein moralisches Betragen, so wie sein Benehmen gegen Vorgesetzte verdient alles Lob.

Von der Direction des k. k. polytechnischen Institutes.

Wien, am 4. März 1854.

Baron Smola, Oberst,
Director.

die Integration linearer Differential-Gleichungen, mit welchem Gegenstande sich Petzval bereits über $\frac{1}{4}$ Jahrhundert beschäftigt hatte, und überreichte dieselbe am 22. Mai 1857 der kais. Akademie der Wissenschaften.

Am 7. October legte ich eine zweite Arbeit über denselben Gegenstand der Akademie vor, diese Arbeit erhielt Petzval zur Berichterstattung. Petzval sprach sich über meine Arbeiten mit einer Heftigkeit und in einer Art aus, die bisher unerhört war. Es war dies am Vorabende jenes Tages, an welchem die Wahlen für die Professuren der neu gegründeten Handels-Akademie vorgenommen wurden, und es hätte dieses Auftreten Petzval's leicht für mich verhängnissvoll werden können. Durch eine hiesige Zeitung wurde der Vorgang in der Akademie der Wissenschaften verbreitet, ich musste nun alles daran setzen, um meine Ehre und meinen Ruf wiederherzustellen, eine keineswegs leichte Sache, wenn man weiss, welchen Einfluss Petzval damals besass und wie hoch sein wohlbegründeter Ruf stand.

Ich richtete am 17. October 1857 an die „Presse“ nachfolgendes Schreiben.

Herr Redacteur!

Die hiesige Akademie der Wissenschaften hat sich in ihrer letzten Wochensitzung bestimmt gefunden, die jüngste meiner ihr überreichten Arbeiten über Antrag ihres Berichterstatters, des Herrn Professors Joseph Petzval, als zur Aufnahme in ihre Druckschriften nicht geeignet, zurückzuweisen. Wer der genannten Akademie eine wissenschaftliche Arbeit einreicht, unterwirft sich, natürlich nur in wissenschaftlicher Beziehung, zum voraus unbedingt ihrem Ausspruche, und es würde mir nicht eingefallen sein, mich über das Geschehene in irgend einer Weise zu äussern, wenn nicht die Motivirung jener Ablehnung durch den genannten Herrn Professor Petzval eine nach Form und Inhalt für mich verletzende gewesen wäre, und überdies durch die Publicität, die ihr mittelst der Berichterstattung in Nr. 473 der „Oesterreichischen Zeitung“ zu Theil wurde, mir nicht allzu sehr geeignet schiene, dem öffentlichen Urtheile über meine Leistungen auf dem Gebiete der höheren Analyse eine mir nachtheilige Richtung zu geben.

Das Fach, dem ich meine Thätigkeit widme, ist bekanntlich nur einem äusserst kleinen Kreise von Lesern zugänglich, und ich kann nicht hoffen, durch eine in das Wesen meiner von der Akademie zurückgewiesenen Arbeit eingehende Discussion das Verdict des Herrn Petzval vor dem Forum der öffentlichen Meinung zu entkräften.

Eine kurze Darstellung der äusseren Umstände, unter welchen jener Wahrspruch erfolgte, wird aber wohl genügen, um nicht nur darzuthun, dass die Akademie der Wissenschaften im vorliegenden Falle vielleicht etwas zu rasch in die Ideen ihres erwähnten Berichterstatters eingegangen, sondern dass namentlich dieser letztere dabei die Grundsätze einer unparteiischen wissenschaftlichen Kritik und zugleich die Vorschriften des Anstandes gegen meine Person in einer nicht zu rechtfertigenden Weise ausser Acht gelassen hat.

Die Arbeit, welche ich der Akademie der Wissenschaften übergab, ist nicht die Erstlingsfrucht eines Anfängers, sondern mein Name als Mathematiker den Mitgliedern dieser gelehrten Körperschaft seit deren Gründung bekannt. Schon im Jahre 1850 fand sich der im In- und Auslande als Gelehrter hochgeachtete Ritter v. Ettingshausen veranlasst, derselben einen Bericht über „drei Abhandlungen zur Theorie numerischer Gleichungen“ zu erstatten, welche ich kurz vorher in „Haidingers Sammlung naturwissenschaftlicher Abhandlungen“ veröffentlicht hatte. Dieser Bericht schliesst mit den für mich schmeichelhaften Worten:

„Nach dieser Darlegung des Inhaltes der Abhandlungen des Herrn Spitzer wird die verehrte Classe sich wohl zu dem Urtheile geneigt finden, dass derselbe ihr eine Arbeit von gediegenem Werthe vorgelegt habe. Sollte dieses, wie ich voraussetze, der Fall sein, so erlaube ich mir noch den Antrag beizufügen, dass gegenwärtiges Gutachten in die Sitzungsberichte aufgenommen, ferner Herrn Spitzer die Anerkennung seines Verdienstes von Seite

der Classe in einem besonderen Schreiben eröffnet und demselben eine angemessene Anzahl von Exemplaren besonderer Abdrücke dieses Berichtes zugesendet werden möge.“

Von da bis zum Jahre 1853 wurden von mir mehrere kleinere und zwei grössere Arbeiten (über Kriterien des Grössten und Kleinsten bei den Problemen der Variationsrechnung) der Akademie überreicht, und von dieser in ihre Druckschriften aufgenommen, bei welchen Anlässen abwechselnd die Herren Ritter von Ettingshausen und Professor Petzval als Berichterstatter fungirten.

Späterhin wurden einige meiner Arbeiten daselbst beanständet, was mich bewog, bis zum heurigen Jahre keine weitere Arbeit einzureichen, sondern dieselben in ausländischen mathematischen Zeitschriften zu veröffentlichen.

Im verflossenen Mai war ich eben im Begriffe, mit meiner Arbeit „über Integration linearer Differential-Gleichungen“ dasselbe zu thun, als mich Herr Professor Regierungsrath von Ettingshausen, dem ich das Manuscript zur Einsicht mitgetheilt hatte, dringend aufforderte, dasselbe lieber der hiesigen Akademie zu übergeben. Diese hat denn auch meine Arbeit über Antrag des genannten Gelehrten, als Berichterstatters, der Aufnahme in ihre Druckschriften würdig befunden, wodurch ich mich veranlasst sah, ihr den zweiten und dritten Theil derselben, die nicht wohl anderswo von dem ersten getrennt erscheinen konnten, gleichfalls zu überreichen. Diese Fortsetzung ist es nun, welche von der Akademie dem Herrn Professor Petzval zur Berichterstattung überwiesen und von demselben als „eine regellose Beispielsammlung voller Lücken“ bezeichnet wird, „welcher der wissenschaftliche Charakter nicht in der Weise innewohne, dass er die Aufnahme derselben in die Schriften der Akademie befürworten könne“. Ich übergehe die anstandswidrigen Ausdrücke, in denen sich Professor Petzval bei dieser Gelegenheit mit einer nichts weniger als olympischen Leidenschaftlichkeit von dem Throne der Wissenschaft herab gegen meine bescheidene Arbeit erging. Ich erzähle den einfachen Sachverhalt und frage nur den Herrn Professor, worin denn eigentlich der wissenschaftliche Charakter bestehe, welcher mathematischen Arbeiten die Appartements-Fähigkeit in den hehren Räumen unserer Akademie verleiht?

Ist es die Form oder der Inhalt meiner Arbeit, welche den Herrn Professor veranlasste, so rücksichtslos darüber den Stab zu brechen? Soll vielleicht jede Reihe von Gleichungen durch bogenlange Abhandlungen über Zweck und Geschichte der Mathematik eingeleitet und durch den unnöthigen Ballast werthloser Redefiguren zu dem Volumen eines förmlichen Lehrbuches angeschwellt werden? Ist es die Aufgabe der Akademien, von den Arbeiten der einheimischen Gelehrten erst dann Notiz zu nehmen, wenn diese ein ganzes Gebiet der Wissenschaften umfassen, oder geht ihr Zweck nicht vielmehr dahin, den einzelnen Forschungen derselben Schritt für Schritt zu folgen und jeden noch so vereinzelt wirklichen Fortschritt in ihren Archiven zu constatiren?

Gehört die aphoristische Form nicht gerade zu dem Wesen derartiger Arbeiten, und ist es nicht vielmehr ein Verdienst derselben, mit möglichster Hinweglassung alles bereits Bekannten, blos das Neue, was darin enthalten ist, kurz und bündig zur Darstellung zu bringen; oder kommt es, etwa vom Standpunkte der Wissenschaft, wirklich darauf an, ob in demselben Satze einmal das Wort „man“ und das anderemal „wir“ als Subject gebraucht wird, beiläufig bemerkt der einzige specielle Fehler, den der Herr Professor, als besonders gewissenhafter Berichterstatter, an meiner Arbeit zu rügen fand?

Wenn es sich aber nicht um die Form, sondern um den Inhalt einer Arbeit handelt, dann steht es wenigstens dem Herrn Professor Petzval übel an, darüber mit Geringschätzung die Achseln zu zucken, ihm, der seit 11 Jahren an der Herausgabe eines mehrbändigen Werkes arbeitet, dessen wesentliche Mängel und Unrichtigkeiten nachzuweisen ja einer der Hauptzwecke meiner bescheidenen Abhandlung war. Darf die durch mich gefundene Lösung jener allerdings schwierigen mathematischen Probleme von dem Herrn Professor, man verzeihe die Wiederholung des Ausdrucks, als eine „überflüssige geistige Onanie“ bezeichnet werden? Und wenn dies erlaubt wäre, mit welchem Namen soll man erst das vergebliche Suchen nach derselben betiteln?

Die Frage über den wissenschaftlichen Werth oder Unwerth meiner offerwähnten Arbeit dreht sich einfach um Folgendes: Sind die Integrale der von mir behandelten Differential-Gleichungen richtig, oder sind sie es nicht? Ueber diesen Punkt der Frage hat Herr Professor Petzval sich in seinem Berichte zu äussern unterlassen, und solange es ihm nicht gelingt, mir einen Fehler im Calcül nachzuweisen, wozu ich ihn seinerzeit, sobald die Arbeit veröffentlicht sein wird, hiemit höflichst einlade, solange werde ich dieselbe, unbeschadet der Achtung vor dem hohen Areopag, der sie zurückgewiesen, als eine wenigstens ebenso werthvolle betrachten dürfen, als jene, welche darin ihre Widerlegung fand. Genehmigen Sie etc.

Simon Spitzer.

und einige Tage später schrieb ich an die kais. Akademie der Wissenschaften Folgendes:

An das hohe Präsidium der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

Ew. Excellenz!

Mit dem tiefsten Bedauern sehe ich mich veranlasst, bei Ew. Excellenz gegen die Art und Weise Beschwerde zu führen, in welcher die kaiserliche Akademie in ihrer Wochensitzung vom 16. October d. J. die Zurückweisung meiner beiden Arbeiten über Integration linearer Differentialgleichungen öffentlich verkündigt hat.

Bei allen Akademien der Wissenschaften gilt es als Grundsatz, über die Zulässigkeit der von Nichtmitgliedern eingereichten Arbeiten in geheimer Sitzung zu entscheiden und im Ablehnungsfalle das betreffende Manuscript dem Verfasser einfach zurückzustellen.

Dieser Gebrauch ist in der Natur der Sache begründet. Die Aufnahme in die Schriften der Akademie bildet zwar den Lohn für die gelungene Arbeit des Einreichers, ihre Zurückweisung soll aber für ihn keine Strafe sein. Derselbe hat noch keine tadelnswerthe Handlung dadurch begangen, dass er der Akademie eine Arbeit übergibt, welche der vorerwähnten Aufnahme nicht würdig befunden wird; es wäre denn, dass der gänzliche Unwerth seiner Leistung, das Einsenden derselben als eine Beleidigung für die gelehrte Körperschaft erscheinen liesse. In diesem alleinigen Falle könnte eine eclatante Zurückweisung in öffentlicher Sitzung als abschreckendes Beispiel für die Zukunft gerechtfertigt erscheinen. Doch selbst dann wäre noch zu untersuchen, ob es nicht besser sei, auf ein solches Strafgericht dem unberufenen Eindringling gegenüber eher zu verzichten, als den echten Jünger der Wissenschaft durch das Beispiel der blossen Möglichkeit einer ähnlichen Demüthigung von dem Einreichen seiner Arbeiten abzuschrecken.

Die letztere Ansicht scheint denn auch bei der Abfassung der Statuten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften massgebend gewesen zu sein. Der §. 26 besagt ausdrücklich: „Berichte über Arbeiten von Nichtmitgliedern werden, nur wenn sie günstig lauten, in dem öffentlichen Theile der Classensitzungen gelesen und auf Antrag der Commission gedruckt.“ In dieser Bestimmung ist die weise und väterliche Absicht des kaiserlichen Stifters dieser Akademie klar ausgedrückt. Sein allerhöchster Wille ging dahin, auch das wissenschaftliche Streben des Nichtmitgliedes durch die ehrenvolle Aussicht der Aufnahme besonders gelungener Arbeiten in die Schriften der Akademie anzueifern, ohne den Einreicher im anderen Falle der Gefahr einer öffentlichen Demüthigung bloß zu stellen, welche seinem Rufe so wie seinem materiellen Fortkommen leicht mehr schaden könnte, als ihm, ich spreche leider aus eigener Erfahrung, ihre öffentliche Anerkennung für den letzteren Zweck nützt.

Die obige Statutarbestimmung ist aber keine blosser Disciplinavorschrift, bindend für die Herren Akademiker der Akademie gegenüber; sie verpflichtet auch diese letztere gegenüber jedem Einreicher einer Arbeit, der bei Uebergabe derselben auf den Schutz jenes Paragraphen rechnen darf, so lange derselbe nicht vorläufig ausser Kraft erklärt und dieser Umstand zur öffentlichen Kenntniss gebracht worden ist.

Wenn daher der ungünstige Bericht über die von mir überreichten beiden Arbeiten dennoch in dem öffentlichen Theile der Classensitzung vom 16. October gelesen und dem

Herrn Professor Petzval gestattet wurde, sich in seiner Berichterstattung, ohne in das Wesen meiner Arbeit irgendwie näher einzugehen, verletzender und herabwürdigender Aeusserungen gegen dieselbe zu bedienen, so wurde damit offenbar die Beobachtung der Schlussbestimmung des §. 26 der Statuten meiner Person gegenüber ausser Acht gelassen und mir ein Unrecht zugefügt, welches mich um so empfindlicher verletzen musste, als der Sachverhalt durch ein geachtetes hiesiges Zeitungsorgan (die österreichische Zeitung) eine weitere Verbreitung erhielt.

Unter diesen Verhältnissen sehe ich mich genöthigt, zur Wahrung meines Rufes als Mathematiker ein hohes Präsidium der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften ehrerbietig aber zugleich bestimmt um eine den Umständen angemessene Genugthuung anzugehen. Die Thatsache selbst kann zwar nicht mehr ungeschehen gemacht werden; selbst das formelle Geständniss, die Vorschrift des §. 26 der Statuten mir gegenüber verletzt zu haben, so viel Selbstverleugnung dieselbe auch von Seite der kaiserlichen Akademie erheischt, würde den üblen Eindruck des Geschehenen nicht verwischen und den mir in der öffentlichen Meinung zugefügten Schaden fortbestehen lassen. Ohne daher dem Urtheile eines hohen Präsidiums über die Form und das Wesen der mir zu gewährenden Genugthuung vorgreifen zu wollen, erlaube ich mir, den ergebenen Vorschlag zu machen, es wolle der kaiserlichen Akademie in ihrer nächsten öffentlichen Sitzung gefallen, den Bericht des Herrn Professors Petzval einer Revision zum Zwecke der statutenmässigen Beschlussfassung in einer geheimen Sitzung zu unterziehen.

Genehmigen Ew. Excellenz bei dieser Gelegenheit den Ausdruck der ausgezeichneten Ehrerbietung womit ich geharre Ew. Excellenz ergebenster Diener

Simon Spitzer.

Die kais. Akademie der Wissenschaften beschloss hierauf, meine beiden Arbeiten, die mir bereits über Antrag des Prof. Petzval rückgesandt wurden, in ihre Sitzungsberichte aufzunehmen.

Petzval war durch mein Auftreten und durch den Beschluss der kais. Akademie der Wissenschaften, welcher auch allgemein bekannt wurde, erbittert, er erneuerte seinen Angriff gegen mich in der Akademie der Wissenschaften neuerdings in heftiger Weise. Meinerseits rief dies nachfolgende Entgegnung hervor, die ich in der „Presse“ am 11. December 1857 veröffentlichte:

Herr Redacteur!

Kaum ist der leidenschaftliche Angriff, den sich Professor Petzval gegen meine, der hiesigen Akademie eingereichten, zwei letzten mathematischen Arbeiten erlaubte, durch den mich ehrenden Beschluss dieser gelehrten Körperschaft auf seinen wahren Werth zurückgeführt worden, als auch schon ein zweiter, nicht minder gereizter Ausfall von Seite meines genannten Gegners in den geweihten Hallen der Wissenschaft auf mich gemacht wurde.

Diesmal handelt es sich um eine meiner früheren Arbeiten, welche die Akademie über Antrag des Herrn Ritters A. v. Ettingshausen in ihre Druckschriften aufgenommen hat. Im Verlaufe jener Arbeit war mir die Veranlassung geboten, darauf hinzuweisen, wie die Integrations-Methode zur Lösung einer gewissen Gattung linearer Differential-Gleichungen, deren Entdeckung Herr Professor Petzval in seinem Werke über „Integration linearer Differential-Gleichungen“ für sich in Anspruch nimmt, bereits von Laplace gemacht worden sei, und demnach nicht mehr als neu angesehen werden könne.

Herr Professor Petzval, welcher mich in der vorletzten Wochensitzung der Akademie abermals mit grosser Vehemenz angriff, konnte zwar die Richtigkeit meiner diesfälligen Behauptung nicht in Abrede stellen, erwähnte jedoch ausdrücklich, dass er auf dem Wege eigener Forschung zu dem gleichen Resultate gelangt sei, woraus wohl folgen würde, dass er zur Zeit seiner angeblichen Entdeckung die entsprechende Arbeit des Laplace nicht kannte. Von diesem letzteren Umstande aber hatte ich nicht die geringste Kenntniss, und hätte ich auch das vermuthen sollen, dass Herr Petzval nochmals entdecken würde, was bereits ent-

deckt war? Hat nicht jeder Entdecker auf dem Gebiete der Wissenschaften die Pflicht, ehe er mit einer angeblich neuen Entdeckung hervortritt, sich umzusehen, was darüber bereits in Druckschriften veröffentlicht und dadurch zum Gemeingute Aller geworden ist? Und vollends, wenn die Lösung, welcher man nachstrebt, von einem Manne wie Laplace herrührt, wenn sie in den Memoiren der französischen Akademie abgedruckt ist, und daher von einem Fachgelehrten, wie Professor Petzval, füglich nicht ignorirt werden durfte, war es mir da wohl erlaubt, an seiner Vertrautheit mit jener Arbeit zu zweifeln?

Kann man mir es da wohl übel nehmen, dass ich die Aufklärung, welche Herr Petzval der hiesigen Akademie über die Genesis seiner vorgeblichen Entdeckung nun nachträglich ertheilt, nicht gleich bei Durchlesung seines Werkes errathen, und meiner Berichtigung etwa hinzugefügt: „Die Entdeckung selbst rührt zwar von Laplace her, der sie schon im Jahre 1782 der französischen Akademie mittheilte, doch scheint Herr Professor Petzval von diesem Zwischenfall keine Ahnung gehabt, sondern die Sache auf seinem eigenen Wege zum zweitenmale gefunden zu haben.“

Was hätte mein gelehrter Gegner zu einer solchen Formulirung gesagt? Wäre er über die ihm angedichtete Unkenntniss der Laplace'schen Arbeiten nicht mit Recht beleidigt gewesen?

Ich hatte aber noch einen andern Grund, mit einer solchen Annahme der mangelhaften Belesenheit des Herrn Professors zurückzuhalten. Eine genauere Vergleichung seiner Arbeit mit der in Lacroix's *Traité du Calcul différentiel, Tome III, pag. 572*, reproducirten Arbeit von Laplace hatte mir gezeigt, dass fast durchgängig dieselben Buchstaben und Zeichen in beiden Arbeiten vorkommen, eine zu auffallende Uebereinstimmung, um sie auf Rechnung eines neckischen Zufalles stellen zu dürfen.

Hatte ich in dem Bisherigen bloß die Priorität von Laplace gegen die Uebergriffe des Herrn Professors Petzval zu wahren, so handelt es sich nun um einen ähnlichen Nachweis zu Gunsten der von mir selbst zuerst angegebenen Lösung einer gewissen Gattung linearer Differential-Gleichungen des n ten Grades nach der von Euler herrührenden, aber von diesem Mathematiker bloß für die Gleichung 2. Grades derselben Form durchgeführten Methode.

In Professor Petzval's Werken findet sich Seite 57 des ersten Bandes diese Gleichung der n ten Ordnung mit (95) bezeichnet, deren Integrale Herr Petzval alldort bestimmt.

Bei meinen Untersuchungen benöthige ich die Integrale dieser Gleichungen in den speciellen Fällen $n=2$ und $n=3$. Ich nahm das Petzval'sche Werk, wollte die benöthigten Integrale herausschreiben, fand aber hiebei, dass die Petzval'schen Formeln ganz unbrauchbar seien, und namentlich das für $n=3$ von ihm angegebene particuläre Integrale thatsächlich zu einer unrichtigen Auflösung der Gleichung führt.

Seite 326 betrachtet Professor Petzval dieselbe specielle Gleichung 2. Ordnung, transformirt sie, und gibt für das Integrale der transformirten Gleichung eine Reihe, die divergent ist und die bekanntlich von allen Mathematikern, nicht bloß von mir allein, eben weil sie divergent ist, als unbrauchbar verworfen wird. Herr Petzval allein kann sie brauchen. So wenigstens versichert er uns in seinem akademischen Vortrage, und wir wünschen ihm von Herzen Glück dazu. Was nützt es aber, wenn Herr Professor Petzval in dieser weiten Welt allein damit zu rechnen weiss und die Methode niemand Anderem mittheilt? Mein gelehrter Gegner verspricht zwar, diese Mittheilung in der Zukunft zu liefern, doch damit drückt er ja gerade seiner eigenen Entdeckung den Stempel der Zukunftswissenschaft auf, gegen welche er Andern gegenüber heftig zu Felde zieht.

Seite 327 gibt Herr Professor Petzval eine ähnliche Transformation für allgemeine Gleichungen dieser Form an, ohne jedoch dies weiter zu verfolgen.

Ja noch ein drittesmal kommt Professor Petzval in der 3. Lieferung, Seite 116, auf diese Gleichung zurück, aber auch hier kommt er mittelst anderer Transformationen zu keinem Integrale.

Also dreimal macht Professor Petzval einen Anlauf, um die besprochene Gleichung

zu integrieren, und ebenso oftmals muss er sich unverrichteter Sache zurückziehen. Ein Zeitraum von nicht weniger als acht Jahren trennt den ersten Anlauf vom dritten.

Ich war daher ganz erfreut, als ich im Sommer des Jahres 1855 in des berühmten Eulers „vollständigen Anleitung zur Integralrechnung“, II. Band, Seite 148, der Salomon'schen Uebersetzung, die Gleichung 2. Ordnung dieser Art gelöst fand, deren Integrale ich vergebens in Professor Petzvals Werk suchte.

Ich habe es versucht, denselben Weg bei Gleichungen höherer Ordnung zu verfolgen, und habe die von mir bei dieser Gelegenheit gefundenen Integrale in Grünerts Archiv für Mathematik, XXVI. Band, 1. Heft, veröffentlicht.

Anderthalb Jahre darauf las ich im selben Archiv, aber im XXVIII. Band, 3. Heft, zu meiner nicht geringen Verwunderung einen Aufsatz des Herrn Petzval, und fand, dass der Herr Professor nun plötzlich, auf genau dieselbe Weise wie ich, diese Gleichung behandelt, nämlich durch unendliche, nach aufsteigenden Potenzen geordnete Reihen einer Integrations-Methode, die bisher Professor Petzval unablässig für unbrauchbar erklärt hatte. (Siehe Petzvals Werk, 1. Band, Seite XI der Vorrede zur ersten Lieferung, und Seite 139.) In der 4. Lieferung, die im diesjährigen Sommer erschien, sah ich Seite 347 wieder, wie Professor Petzval die genannte Gleichung auf die von mir früher gezeigte Weise behandelt, und Seite 353 macht der Unfehlbare eine Schwenkung, erklärt die früher wiederholt für unbrauchbar bezeichnete Integrations-Methode nach aufsteigenden Potenzen der Veränderlichen für brauchbar, und umgekehrt die früher für brauchbar erklärten Methoden für unbrauchbar.

Und nach diesen Thatsachen, von deren Wahrheit sich Jedermann überzeugen kann, beklagt sich Herr Petzval, wenn ich in meinem der Akademie überreichten Memoire die Worte fallen lasse: „Wir sehen aus der jüngst erschienenen 4. Lieferung, dass in neuester Zeit Petzval den von uns eingeschlagenen Weg für gut findet.“

Der unparteiische Leser mag nun selber urtheilen, in wieweit Herrn Petzval's Vermuthung, ich hätte in seinen Werken lediglich Druckfehler aufgefunden, begründet sei.

Das geringschätzigste Urtheil, zu welchem sich Professor Petzval in Bezug auf meine mathematischen Arbeiten hinreissen liess, übergehe ich mit Stillschweigen; nur den Vorwurf einer Unrichtigkeit derselben muss ich entschieden zurückweisen, und erwarte mit Ungeduld die Veröffentlichung seines erwähnten Vortrages, um seine Einwürfe Punkt für Punkt zu widerlegen.

Simon Spitzer.

Es sind nun mehr als zwanzig Jahre verflossen, ich bedaure lebhaft mit Petzval, der in der That ein höchst bedeutender Mann ist, und unvergleichlich hoch über Herrn Dr. Winckler und über Herrn Dr. Igel steht, in Conflict gekommen zu sein; allein ich kann mir keinen Vorwurf machen, und ich würde heute, in ähnlicher Weise angegriffen, mich wahrscheinlich auf gleiche Weise vertheidigen.

Inhalt.

	Seite
Vorrede	I
Erster Abschnitt	1
Einleitung	—
§. 1. Auseinandersetzung der Laplace'schen Integrationsmethode für lineare Differentialgleichungen	—
§. 2. Eintheilung der Differentialgleichungen der Gestalt: $(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0$ in vier Hauptformen	3

Erstes Capitel.

§. 3. Die Differentialgleichung der ersten Hauptform lautet: $(m + x) y'' + [A + B - (\alpha + \beta)(m + x)] y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m + x)] y = 0$	4
§. 4. Bedeuten A und B positive Zahlen, so ist das Integrale der obigen Differentialgleichung $y = \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du$	5
§. 5. Sind A und B reelle, ganze positive Zahlen, so ist das vollständige Integrale der Gleichung (14) $y = C_1 e^{\alpha x} \left[\frac{\varphi(\alpha)}{m+x} - \frac{\varphi'(\alpha)}{(m+x)^2} + \frac{\varphi''(\alpha)}{(m+x)^3} - \dots \right] + C_2 e^{\beta x} \left[\frac{\varphi(\beta)}{m+x} - \frac{\varphi'(\beta)}{(m+x)^2} + \frac{\varphi''(\beta)}{(m+x)^3} - \dots \right]$ vorausgesetzt, dass $\varphi(u) = (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1}$ ist	5
§. 6. Das Integrale $y = \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du$ in welchem A und B positive Zahlen bezeichnen, wird in unendliche Reihen entwickelt	7
§. 7. Die im vorhergehenden §. entwickelten unendlichen Reihen werden bezüglich ihrer Convergenz untersucht	9
§. 8. Es wird bewiesen, dass die im §. 6 entwickelten unendlichen Reihen der Differentialgleichung (14) Genüge leisten	10

§. 9. Aufstellung eines zweiten particulären Integrales der Differentialgleichung (14) in folgender Form:

$$y = (m + x)^{1-A-B} \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{-B} (u - \beta)^{-A} du \quad (28)$$

Dieses Integrale ist giltig, falls $1 - A$ und $1 - B$ positive Zahlen sind . 12

§. 10. Sind A und B reell, ganz und negativ, so ist das Integrale der Differentialgleichung (14) folgendes:

$$y = C_1 e^{\alpha(m+x)} \left[\frac{\psi(\alpha)}{m+x} - \frac{\psi'(\alpha)}{(m+x)^2} + \frac{\psi''(\alpha)}{(m+x)^3} - \dots \right] \cdot (m+x)^{1-A-B} +$$

$$+ C_2 e^{\beta(m+x)} \left[\frac{\psi(\beta)}{m+x} - \frac{\psi'(\beta)}{(m+x)^2} + \frac{\psi''(\beta)}{(m+x)^3} - \dots \right] \cdot (m+x)^{1-A-B}$$

vorausgesetzt, dass

$$\psi(u) = (u - \alpha)^{-B} (u - \beta)^{-A}$$

ist 13

§. 11. Entwicklung des Integrales (28) in unendliche Reihen 13

§. 12. Aufstellung des vollständigen Integrales der Differentialgleichung (14), im Falle A und B positive echte Brüche sind, sowohl in Form bestimmter Integrale, als auch in Form unendlicher convergenter Reihen 14

§. 13. Ermittlung des vollständigen Integrales der Differentialgleichung (14) für den Specialfall

$$A + B = 1$$

woselbst A und B positive echte Brüche bedeuten 15

§. 14. Nachweis der Richtigkeit des Integrales

$$y = \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} \log [(m+x)(u - \alpha)(u - \beta)] du$$

für den Fall, in welchem $A + B = 1$ ist, unter A und B positive echte Brüche verstanden. 17

§. 15. Ermittlung des vollständigen Integrales der Differentialgleichung

$$(m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)]y=0$$

in dem Falle, in welchem $A+B=1$ ist: unter A und B positive echte Brüche verstanden, in Form unendlicher, convergenter Reihen 18

§. 16. Nachweis der Richtigkeit des im vorhergehenden §. gefundenen Integrales . . 21

§. 17. Die beiden Differentialgleichungen

$$(m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)]y=0$$

$$(m+x)Y'' + [A+a+B+b-(\alpha+\beta)(m+x)]Y' + [-(A+a)\beta-(B+b)\alpha+\alpha\beta(m+x)]Y=0$$

in welchen a und b reelle, ganze, positive Zahlen bezeichnen, haben Integrale, die in folgendem Zusammenhange stehen:

$$Y = e^{\beta x} \frac{d^b}{dx^b} \left[e^{(\alpha-\beta)x} \frac{d^a}{dx^a} (e^{-\alpha x} y) \right] \quad 23$$

§. 18. Integration der Gleichung

$$(m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)]y=0$$

in dem Falle, in welchem A und B positive unechte Brüche sind 26

§. 19. Integration derselben Gleichung in dem Falle, in welchem A und B negative Brüche sind 26

§. 20. Integration derselben Gleichung in dem Falle, in welchem A und B Brüche sind, von entgegengesetzten Zeichen 27

	Seite
§. 21. Andere Integrationsmethode für den in §. 20 bezeichneten Fall	28
§. 22. Integration der Gleichung (14) für den Fall, in welchem eines der beiden Argumente A oder B oder beide zugleich reelle, ganze, positive Zahlen sind	29
§. 23. Aufstellung des vollständigen Integrales der Gleichung (14) für den im vorhergehenden §. besprochenen Falle	30
§. 24. Ermittlung des im §. 22 aufgestellten Integrales in Reihen	32
§. 25. Integration der Gleichung (14) in dem Falle, in welchem eines der beiden Argumente A oder B eine reelle, ganze, negative Zahl ist.	32
§. 26. Darstellung des vollständigen Integrales in dem Falle, in welchem eines der Argumente A oder B reell, ganz und negativ ist	33
§. 27. Petzval's Integrationsmethode	34
§. 28. Fortsetzung	36
§. 29. Entwicklung des Ausdruckes	

$$y = \left\{ \frac{d^{-A}}{du^{-A}} \left[e^{u(m+x)} (u - \beta)^{B-1} \right] \right\}_\alpha$$

in Reihen 36

§. 30. Aufstellung des Integrales der Gleichung (14) in der Form	
--	--

$$y = \int_{u_1}^{u_2} (x - u)^{\lambda-1} W du$$

§. 31. Nachweis, dass das so eben aufgestellte Integrale, entwickelt in der Regel auf divergente Reihen führt	40
§. 32. Integration der Gleichung (14) in dem Falle, in welchem A und B imaginär sind, der reelle Bestandtheil hievon aber eine ganze Zahl ist	41
§. 33. Nachweis, dass das Integrale	

$$y = \int_{\alpha}^{\infty} e^{u(m+x)} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} du$$

in der Regel auf divergente Reihen führt 41

Zweites Capitel.

§. 34. Ist bei der Differentialgleichung (1)	
$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{(u - \alpha)^2} + \frac{B}{u - \alpha}$	
so lässt sich die Laplace'sche Methode direct nicht anwenden	44
§. 35. Zurückführung der Differentialgleichung	
$(m + x) y'' + [B - 2\alpha(m + x)] y' + [A - B\alpha + \alpha^2(m + x)] y = 0$ (77)	
durch Einführung neuer Variablen auf die Form (14)	44
§. 36. Integration der Gleichung (77) für den Fall, in welchem $B - \frac{1}{2}$ Null ist, oder eine ganze positive Zahl	46
§. 37. Nachweis der Richtigkeit der Formel	

$$y = e^{\alpha x} \frac{d^{B-\frac{1}{2}}}{dx^{B-\frac{1}{2}}} \left[C_1 e^{+2\sqrt{-A(m+x)}} + C_2 e^{-2\sqrt{-A(m+x)}} \right]$$

für den eben genannten Fall 47

§. 38. Integration der Gleichung (77) für den Fall, in welchem $\frac{3}{2} - B$ Null ist, oder eine ganze positive Zahl	48
--	----

- §. 39. Entwicklung des Integrales der Differentialgleichung
 $(m + x) y'' + [B - 2\alpha(m + x)] y' + [A - B\alpha + \alpha^2(m + x)] y = 0$
 in dem Fall, in welchem $B - \frac{1}{2}$ oder in welchem $\frac{3}{2} - B$ ganze positive Zahlen
 sind, in Reihen 49

Drittes Capitel.

- §. 40. Aufstellung der Differentialgleichung (1) in dem 3. Hauptfalle in der Form:
 $n y'' + (m + x - n\alpha) y' + [A - \alpha(m + x)] y = 0$ (89) 50
- §. 41. Integration der Gleichung (89) für den Fall, in welchem A positiv ist, mittelst
 der Laplace'schen Methode 51
- §. 42. Transformation der Gleichung (89) in die Form

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} + Az \quad (97) \quad 53$$

- §. 43. Integration der Gleichung (97) in dem Falle, in welchem A eine ganze negative
 Zahl ist 54
- §. 44. Fortsetzung 55
- §. 45. Fortsetzung 58
- §. 46. Integration der Differentialgleichung (97) für die Fälle, in welchen die Zahl A
 gleich ist, -1 , -2 und -3 60
- §. 47. Integration der Gleichung (97) in dem Falle, in welchem A eine gebrochene
 und negative Zahl ist 61
- §. 48. Zusammenstellung der Formeln, die wir bei Gelegenheit der Integration der
 Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi \frac{dz}{d\xi} + Az$$

in Form von bestimmten Integralen genommen haben 65

- §. 49. Beispiele hiezu: Integration der Gleichungen $z'' = \xi z' - \frac{1}{2} z$, $z'' = \xi z' - \frac{3}{2} z$ 66
- §. 50. Entwicklung der im §. 48 aufgestellten bestimmten Integrale in unendlichen
 Reihen. 67
- §. 51. Fortsetzung 69
- §. 52. Beispiele hiezu: Integration der Gleichung $z'' = \xi z' - 8z$, $z'' = \xi z' - 9z$ 71
- §. 53. Fortsetzung der Entwicklung der bestimmten Integrale in unendliche Reihen 72
- §. 54. Beispiele hiezu: Integration der Gleichungen $z'' = \xi z' - \frac{13}{2} z$ 76
- §. 55. Betrachtungen über die unendlichen Grenzen, die bei den Integralen der Diffe-
 rentialgleichungen

$$n y'' + (m + x - n\alpha) y' + [A - \alpha(m + x)] y = 0$$

auftreten 76

- §. 56. Integration der Gleichung (89) für den Fall, in welchem A eine ganze positive
 Zahl ist, durch die Formel

$$y = e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[e^{-\frac{m+n\alpha}{n} \cdot x - \frac{x^2}{2n}} \right] \quad 77$$

- §. 57. Strenge Ableitung der oben aufgestellten Formel 78
- §. 58. Integration der Gleichung (89) für den Fall, in welchem A eine ganze negative
 Zahl ist, durch die Formel

$$y = e^{-\frac{(m+x)^2}{2n}} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}} \left[e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \right] \quad 79$$

- §. 59. Beispiele: Integration der Gleichungen $z'' = \xi z' + z$, $z'' = \xi z' + 2z$, $z'' = \xi z' + 3z$ 80

§. 60. Integration der Gleichung

$$n y'' + (m + x - n \alpha) y' + [A - \alpha (m + x)] y = 0$$

nach Petzval's Methode 81

§. 61. Durch die Einführung neuer Variablen mittelst der beiden Substitutionen

$$y = e^{\alpha x} z \quad \text{und} \quad \xi = (m + x + n \alpha)^2$$

wird die Gleichung (89) auf einen Specialfall der Gleichung

$$(m + x) y'' + [A + B - (\alpha + \beta)(m + x)] y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m + x)] y = 0$$

zurückgeführt 82

§. 62. Entwicklung der beiden Formeln

$$y = e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \right]$$

und

$$y = e^{-\frac{(m+x)^2}{2n}} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}} \left[e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \right]$$

in Reihen. 83

Viertes Capitel.

§. 63. Integration der Gleichung

$$a_2 y'' + a_1 y' + (a_0 + x) y = 0 \quad (141)$$

mittelst der Laplace'schen Methode 84

§. 64. Reduction der Gleichung (141) auf die Form

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \xi z$$

und Integration dieser Gleichung 86

§. 65. Entwicklung des im vorhergehenden §. gefundenen Integrales in unendliche Reihen 87

§. 66. Nachweis, dass die im vorhergehenden §. gefundenen Reihen auch der Differentialgleichung genügen 89

§. 67. Zulässigkeit unendlicher Grenzen bei der Integration der Gleichung (141) . . . 89

§. 68. Durch Einführung neuer Variablen mittelst den beiden Substitutionen

$$y = e^{\lambda x} z \quad \text{und} \quad a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 + x = \xi^{\frac{2}{3}}$$

wird die Gleichung (141) auf einen Specialfall der Gleichung

$$(m + x) y'' + [A + B - (\alpha + \beta)(m + x)] y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m + x)] y = 0$$

zurückgeführt 90

Zweiter Abschnitt.

§. 69. Transformation der Riccati'schen Gleichung $y'' = x^m y$ 92

§. 70. Integration der Riccati'schen Gleichung im Falle m positiv ist 94

§. 71. Integration der Gleichung $x y'' = y$ 95

§. 72. Integration der Differentialgleichung $x^3 y'' = y$ 97

§. 73. " " " $x^4 y'' = y$ 97

§. 74. Integration der Gleichungen: $x^5 y'' = y$; $x^6 y'' = y$; $x^7 y'' = y$ 98

§. 75. Kummer's Methode für die Integration der Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y \quad 99$$

§. 100. Neuer Beweis für die Formel

$$\frac{d^n y}{d \xi^n} = (-1)^n x^{n+1} \frac{d^n (x^{n-1} y)}{d x^{n-1}}$$

in welcher $\xi = \frac{1}{x}$ ist 138

§. 101. Elimination von y aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} y' &= P y \\ u &= A y^2 + B y \end{aligned} \quad 138$$

§. 102. Elimination von y aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} y' &= P y \\ u &= A y^3 + B y^2 + C y \end{aligned} \quad 139$$

§. 103. Elimination von y aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} y' &= P y \\ u &= A L y^2 + B M y \end{aligned} \quad 140$$

§. 104. Elimination von y aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} y' &= P y \\ u &= A L y^3 + B M y^2 + C N y \end{aligned} \quad 141$$

§. 105. Elimination von y aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} y'' &= P y \\ u &= y^2 \end{aligned} \quad 142$$

§. 106. Elimination von y aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} y'' &= P y \\ u &= A y^2 + B y \end{aligned} \quad 143$$

§. 107. Elimination von y aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} y''' &= P y' + Q y \\ u &= y^2 \end{aligned} \quad 145$$

§. 108. Construction jener linearen Differentialgleichungen, denen genügt wird durch

$$y = C_1 e^{m u} + C_2 e^{n u} .$$

und durch

$$y = C_1 v^m + C_2 v^n \quad 147$$

Anhang.

Abfertigung des Dr. B. Igel. 149

Abfertigung des Prof. Dr. Anton Winckler. 154

Ursachen meines Zerwürfnisses mit Petzval. 180

Druckfehler - Verzeichniss.

Seite 31, letzte Zeile, soll in der daselbst stehenden Formel statt $(m+x)^B$ stehen:

$$(m+x)^A$$

„ 48, 3. Zeile von unten, soll statt z und $z-B$ stehen:

$$z \text{ und } 2-B.$$

„ 86, 87 und 90, soll stets statt $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 + x$ stehen:

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 + x$$

„ 149, 9. Zeile von oben, soll statt erwiesen, im LXXIV:

erwiesen, selbe im LXXIV

„ 154 bis 160 soll stets statt Winkler stehen:

Winckler.

Verlag von Carl Gerold's Sohn in Wien.

STUDIEN
über die Integration linearer Differential-Gleichungen
von Simon Spitzer.

gr. 8. 1 fl. 40 kr. = 3 M. — Erste Fortsetzung. gr. 8. 1 fl. = 2 M. — Zweite Fortsetzung (Schluss). gr. 8. 1 fl. 60 kr. = 2 M. 40 Pf.

NEUE STUDIEN
über die Integration linearer Differential-Gleichungen
von Simon Spitzer.
gr. 8. 3 fl. = 6 M.

Allgemeine Auflösungen
der Zahlen-Gleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten
von Simon Spitzer.
gr. 8. 2 fl. = 4 M.

Tabellen für die Zinses-Zinsen und Renten-Rechnung.
Mit Anwendung derselben auf die
Berechnung von Anlehen, Construction von Amortisationsplänen etc.
von Simon Spitzer.
gr. 8. 7 fl. 50 kr. = 15 M.

Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften
von Simon Spitzer.
gr. 8. 1 fl. 50 kr. = 3 M.

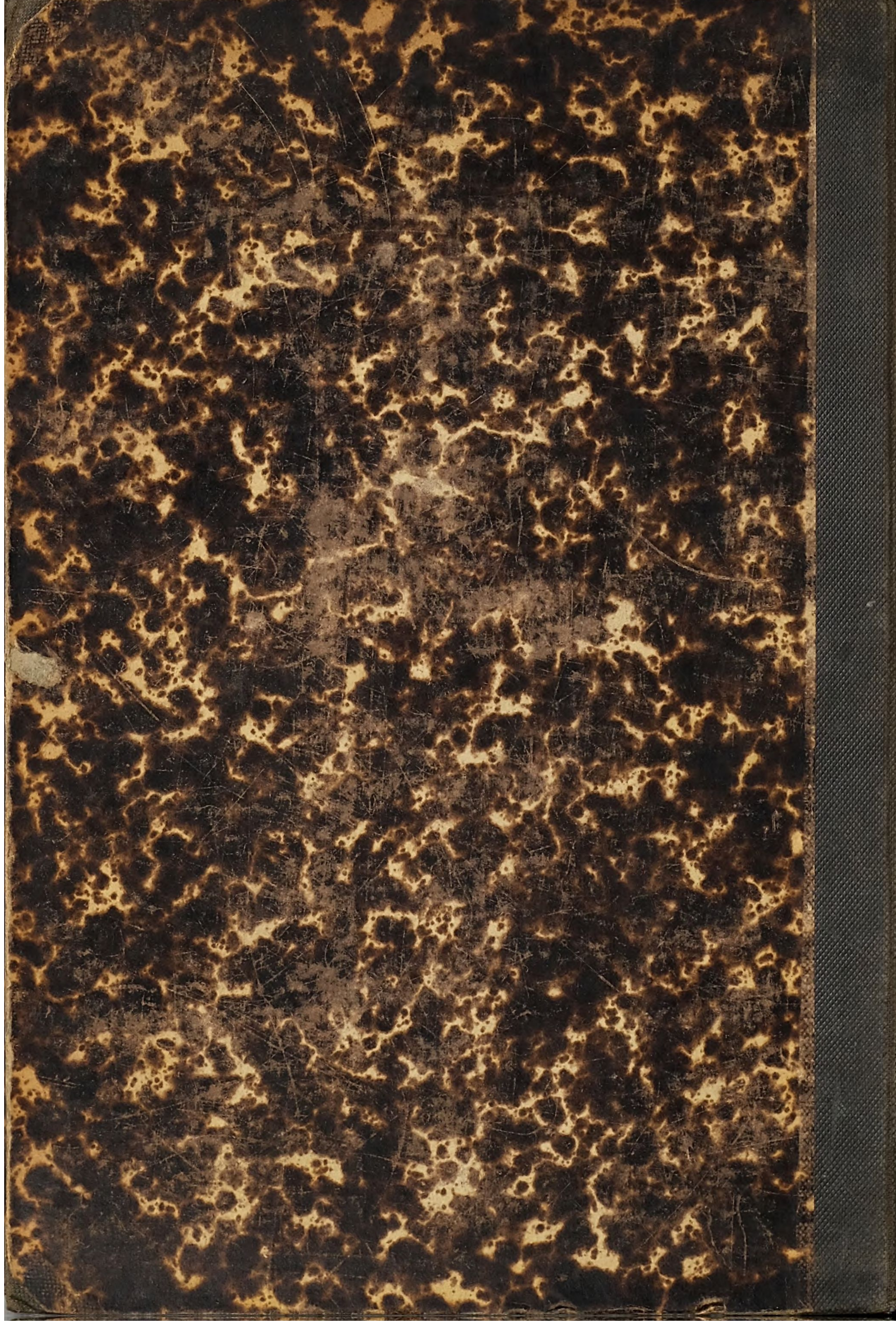
Vollständige Anleitung zur Integralrechnung
von Leonhard Euler.
Aus dem Lateinischen in's Deutsche übersetzt von Josef Salomon.
4 Bände. gr. 8. 12 fl. = 25 M. 50 Pf.

Anleitung zur höheren Mathematik
von C. L. von Littrow.
Mit 4 Kupfertafeln. gr. 8. 3 fl. = 6 M.

Compendium der höheren Mathematik
von Adam Ritter von Burg.
Dritte sehr vermehrte und verbesserte Auflage.
Mit 4 Kupfertafeln. gr. 8. 5 fl. 80 kr. = 12 M.

Anti-Logarithmen
oder: Tafeln zum bequemen und schnellen Aufsuchen der Zahlen von
1 bis 10.000 zu gegebenen fünfstelligen Logarithmen
von Robert von Sterneek.
8. 60 kr. = 1 M. 20 Pf.





Spitzer, Simon,

Vorlesungen über lineare Differential-Gleichungen

Wien 1878

Math.p. 538 mf

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11374273-5